Op 4 februari vond de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade voor de vijftigste keer plaats op diverse middelbare scholen. De wedstrijd bestond uit acht vijfkeuzevragen (2 punten per goed antwoord) en vier open vragen (5 punten per goed antwoord). De opgaven waren dusdanig uitdagend, dat het oplossen van een paar opgaven al een hele prestatie was. Uiteraard was het doel ook om met plezier aan interessante wiskunderaadsels te werken, en dat is ongetwijfeld gelukt. In dit artikel bekijken we een van de vier open vragen.

■ door Julian Lyczak

OP EN NEER MET DE ROLTRAP

Opgave B2 (NWO eerste ronde 2011):
In een warenhuis loopt een roltrap van de begane grond naar de eerste verdieping. Dion gaat met deze roltrap omhoog; hij zet hierbij zelf ook nog een aantal stappen in een vast tempo. Raymond loopt over dezelfde roltrap, tegen de richting in, van boven naar beneden en zet hierbij stappen in hetzelfde tempo als Dion. Ze nemen allebei één trede per stap. Dion is na precies 12 stappen boven; Raymond is na precies 60 stappen beneden.
Hoeveel stappen zou Dion nodig hebben om boven te komen als de roltrap stilstond?

Blijkbaar zit er zelfs wiskunde verstopt in het lopen op een roltrap... Een eerste gedachte is misschien dat het aantal stappen voor de stilstaande roltrap het gemiddelde is van de genoemde 12 en 60, dus $(12 + 60)/2 = 36$. Maar we zullen zien dat dit te simpel gedacht is.

TWEE VERGELIJKINGEN, TWEE ONBEKENDEN

We bekijken het probleem eerst eens van de andere kant, met verzonnen getallen. Neem bijvoorbeeld een roltrap met 45 treden. Dat is dus het aantal stappen dat nodig is om boven te komen als de roltrap stilstaat. We nemen verder aan dat de roltrap een zodanige snelheid heeft dat als Dion twee stappen heeft gezet, de roltrap één trede is opgeschoven met Dion mee. Dan hoeft hij dus voor iedere 3 treden die hij stijgt, maar 2 stappen te zetten. Hij zal dus in $45 \cdot \frac{2}{3} = 30$ stappen boven zijn.

Voor Raymond, die van boven naar beneden loopt, gaat de roltrap juist tegen zijn looprichting in. Voor iedere 2 stappen die hij zet, is hij eigenlijk maar 1 van de 45 treden gedaald. Hij zal dus wel $45 \cdot \frac{2}{1} = 90$ stappen nodig hebben. Het gemiddelde is $(30 + 90)/2 = 60$, maar de roltrap is toch echt slechts 45 treden lang. De vraag is hoe we nu van die 30 en 90 wél op 45 kunnen uitkomen.

Om dit te onderzoeken, voeren we variabelen in. Zoals we al in het probeersel hierboven zagen, is het misschien slim om het aantal treden van een stilstaande roltrap een naam te geven. We kiezen voor t, van treden. Verder hebben we nóg een parameter gebruikt: het aantal treden dat de roltrap opschuift in de tijd dat Dion of Raymond precies één stap doen. Deze parameter zullen we aangeven met v. In het verhaal hierboven was $v = \frac{1}{2}$.

Dion loopt met de roltrap mee en zal dus als hij 1 stap zet, $1 + v$ trede stijgen. Maar Raymond beweegt tegen de roltrap in, en daalt effectief slechts $1 - v$ trede per stap. Het aantal stappen dat nodig is om t treden te stijgen als je per stap $1 + v$ treden beweegt, is simpelweg $\frac{t}{1+v}$. Net zo zal Raymond precies $\frac{t}{1-v}$ stappen nodig hebben om weer beneden te komen. Deze aantallen waren gegeven in de opgave en we vinden dus het stelsel van vergelijkingen

$$\frac{t}{1+v} = 12 \quad \text{en} \quad \frac{t}{1-v} = 60. \qquad (1)$$

Uit beide vergelijkingen kunnen we v oplossen, wat

OM OVER NA TE DENKEN

1. Dion en Raymond komen nog bij een andere roltrap en doen daar hetzelfde: Dion loopt naar boven, Raymond in hetzelfde tempo naar beneden. Maar nu blijkt dat ze precies evenveel stappen nodig hebben. Wat is er met deze roltrap aan de hand?

2. Hoe zit dat eigenlijk als Dion juist meer stappen nodig heeft dan Raymond?

3. Bekijk weer een nieuwe roltrap, waarvoor geldt dat als Dion 1 stap zet, hij al 2 treden gestegen is. Als Dion weer 12 stappen nodig heeft om boven te komen, hoeveel stappen heeft Raymond dan nodig om beneden te komen? Hoeveel treden heeft de roltrap?

ANTWOORDEN

1. De roltrap staat stil.

2. De snelheid van de roltrap is dan eigenlijk negatief. Oftewel: de roltrap loopt niet van beneden naar boven, maar juist van boven naar beneden.

3. Raymond komt nooit beneden aan, want voor elke stap die hij naar beneden zet, stijgt de roltrap ook een trede. Raymonds snelheid $1 - v$ is hier dus gelijk aan 0. In formule (2) valt daarom de term $\frac{1}{60}$ (die gelijk is aan $\frac{1-v}{t}$) helemaal weg en krijgen we $t = 24$.

leidt tot

$$\frac{t}{12} - 1 = v = 1 - \frac{t}{60},$$

dus

$$t\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{60}\right) = \frac{t}{12} + \frac{t}{60} = 2.$$

Hieruit volgt dat

$$t = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{60}}. \qquad (2)$$

Teller en noemer met 60 vermenigvuldigen levert $t = \frac{120}{5+1} = 20$. Hiermee hebben we de opgave opgelost!

BREUKEN OMDRAAIEN Een andere manier om v te elimineren, die in dit geval toevallig mooi werkt: draai alle breuken in (1) om:

$$\frac{1+v}{t} = \frac{1}{12} \quad \text{en} \quad \frac{1-v}{t} = \frac{1}{60}.$$

Als we deze twee vergelijkingen optellen, valt v weg:

$$\frac{2}{t} = \frac{1+v}{t} + \frac{1-v}{t} = \frac{1}{12} + \frac{1}{60},$$

waarmee we weer vinden dat

$$t = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{60}} = 20.$$

Overigens hadden we ook eerst v kunnen bepalen en dan die waarde weer invullen om t te vinden. Als we de twee vergelijkingen (1) op elkaar delen, verliezen we direct de t:

$$\frac{1+v}{1-v} = \frac{\left(\frac{t}{1-v}\right)}{\left(\frac{t}{1+v}\right)} = \frac{60}{12} = 5.$$

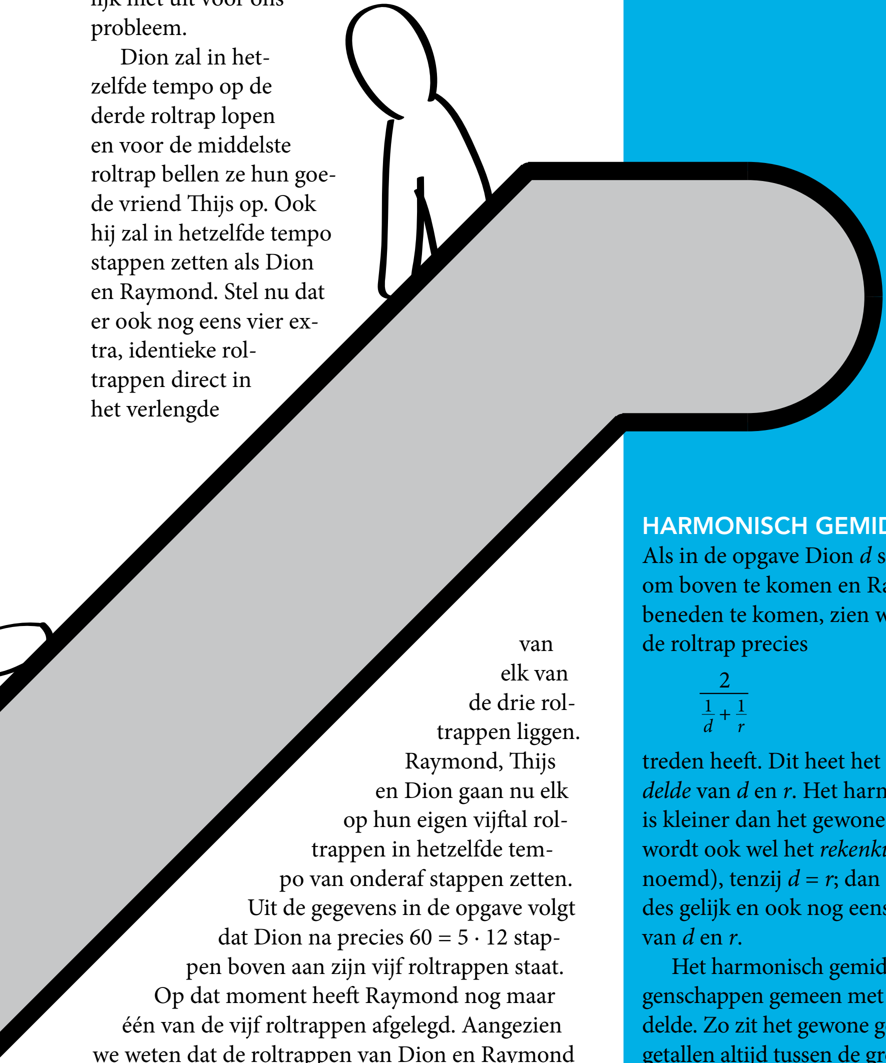
Hiermee krijgen we een eenvoudige lineaire vergelijking voor v: $1 + v = 5 - 5v$. Deze kunnen we herschrijven tot $6v = 4$ om te vinden $v = \frac{2}{3}$. Als we dit weer invullen in een van onze eerste vergelijkingen (1), bijvoorbeeld $t/(1 + v) = 12$, vinden we dat $t = 12 \cdot (1 + \frac{2}{3}) = 20$. Ter controle kunnen we nog nagaan of we dezelfde t krijgen als we $t/(1 - v) = 60$ hadden gekozen om onze v in in te vullen: $t = 60 \cdot (1 - \frac{2}{3}) = 20$. Gelukkig maar.

VIJFTIEN ROLTRAPPEN Toch kunnen we de opgave ook zonder al dit rekenwerk oplossen. Bekijk daarvoor drie identieke roltrappen naast elkaar. De eerste roltrap loopt naar beneden, de tweede staat stil en de derde loopt naar boven, even snel als de eerste roltrap naar beneden loopt.

We laten Raymond nu omhoog lopen, maar wel op de eerste roltrap, dus nog steeds tegen de roltraprichting in. Want of hij nou omlaag loopt over een roltrap die om-

hoog gaat, of omhoog over een roltrap die omlaag gaat, dat maakt natuurlijk niet uit voor ons probleem.

Dion zal in hetzelfde tempo op de derde roltrap lopen en voor de middelste roltrap bellen ze hun goede vriend Thijs op. Ook hij zal in hetzelfde tempo stappen zetten als Dion en Raymond. Stel nu dat er ook nog eens vier extra, identieke roltrappen direct in het verlengde van elk van de drie roltrappen liggen. Raymond, Thijs en Dion gaan nu elk op hun eigen vijftal roltrappen in hetzelfde tempo van onderaf stappen zetten. Uit de gegevens in de opgave volgt dat Dion na precies $60 = 5 \cdot 12$ stappen boven aan zijn vijf roltrappen staat. Op dat moment heeft Raymond nog maar één van de vijf roltrappen afgelegd. Aangezien we weten dat de roltrappen van Dion en Raymond even snel gaan, maar in tegengestelde richting, ligt de snelheid van Thijs precies tussen de snelheden van Dion en Raymond. Thijs zal zich dus na 60 stappen precies tussen Dion en Raymond bevinden. Hij heeft dus in 60 stappen drie stilstaande roltrappen beklommen. Voor één stilstaande roltrap zijn dus 20 stappen nodig. We vinden opnieuw dat de stilstaande roltrap uit 20 treden bestaat. ■



HARMONISCH GEMIDDELDE

Als in de opgave Dion d stappen nodig heeft om boven te komen en Raymond r stappen om beneden te komen, zien we dat in het algemeen de roltrap precies

$$\frac{2}{\frac{1}{d}+\frac{1}{r}}$$

treden heeft. Dit heet het *harmonisch gemiddelde* van d en r. Het harmonisch gemiddelde is kleiner dan het gewone gemiddelde $\frac{d+r}{2}$ (dit wordt ook wel het *rekenkundig gemiddelde* genoemd), tenzij $d = r$; dan zijn beide gemiddeldes gelijk en ook nog eens gelijk aan de waarde van d en r.

Het harmonisch gemiddelde heeft allerlei eigenschappen gemeen met het gewone gemiddelde. Zo zit het gewone gemiddelde van twee getallen altijd tussen de grootste en de kleinste van de twee; hetzelfde geldt voor het harmonisch gemiddelde. Ook geldt voor beide: als d en r met een bepaalde factor toenemen, dan neemt het gemiddelde van de twee getallen toe met diezelfde factor. Dus als Dion 120 stappen nodig had gehad en Raymond 600, kunnen we meteen zeggen dat de roltrap 200 treden hoog is.