Week 19: bijecties

Vaak wordt er gevraagd om iets te tellen, maar soms wordt er ook gevraagd om te laten zien dat er van twee totaal verschillende dingen die je kunt tellen, toch hetzelfde aantal zijn. Een manier om dat te doen is door middel van bijecties. Om een bijectie te kunnen construeren, helpt het zoals wel vaker om met kleine gevallen te beginnen.

Voorbeeldopgave 1. *Een partitie van een niet-negatief geheel getal n is een manier om n als een sum van natuurlijke getallen te schrijven, waarbij de volgorde van de getallen niet uitmaakt (dat is: twee sommen die hetzelfde zijn op volgorde na, beschouwen we als dezelfde partitie). Laat zien dat het aantal partities van n in precies k delen gelijk is aan het aantal partities van n, waarvan het grootste deel precies grootte k heeft.*

Bewijs. Laten we eerst een aantal kleine gevallen afgaan.

n	k	partities in k delen	partities met grootste deel k
1	1	1	1
1	2	–	–
2	1	2	1+1
2	2	1+1	2
3	1	3	1+1+1
3	2	2+1	2+1
3	3	1+1+1	3

Je zou haast denken dat het precies dezelfde partities zijn die in de hokjes voorkomen, maar dan in de omgekeerde volgorde, maar schijn bedriegt.

n	k	partities in k delen	partities met grootste deel k
4	1	4	1+1+1+1
4	2	3+1, 2+2	2+2, 2+1+1
4	3	2+1+1	3+1
4	4	1+1+1+1	4
5	1	5	1+1+1+1+1
5	2	4+1, 3+2	2+2+1, 2+1+1+1
5	3	3+1+1, 2+2+1	3+2, 3+1+1
5	4	2+1+1+1	4+1
5	5	1+1+1+1+1	5
6	1	6	1+1+1+1+1+1
6	2	5+1, 4+2, 3+3	2+2+2, 2+2+1+1, 2+1+1+1+1
6	3	4+1+1, 3+2+1, 2+2+2	3+3, 3+2+1, 3+1+1+1
6	4	3+1+1+1, 2+2+1+1	4+2, 4+1+1
6	5	2+1+1+1+1	5+1
6	6	1+1+1+1+1+1	6

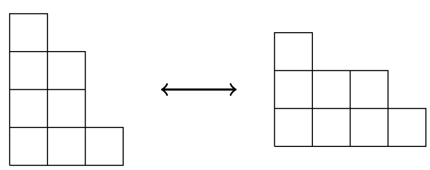
Het is een goed idee om de bijectie te gaan gokken. Het eerste niet-triviale geval is $(n, k) = (4, 2)$. Het valt op dat 4 aan de linkerkant correspondeert met 1+1+1+1 aan de rechterkant en 1+1+1+1 aan de linkerkant met 4 aan de rechterkant. Je zou dus kunnen bedenken om $3 + 1$ dat een grote term bevat te koppelen aan $2+1+1$, en $2+2$ aan $2+2$. Als we nu hetzelfde proberen te doen dan vinden we voor $(n, k) = (5, 2)$ en $(n, k) = (5, 3)$ dan koppelen we $4 + 1$ aan $2 + 1 + 1 + 1$, en $3 + 2$ aan $2 + 2 + 1$, en $3 + 1 + 1$ aan $3 + 1 + 1$, en $2 + 2 + 1$ aan $3 + 2$. Het valt op dat de grootste term aan de linkerkant gelijk is aan het aantal termen aan de rechterkant (omgekeerd is dat natuurlijk triviaal zo). Dit blijkt in de hele tabel tot en met $n = 5$ te kloppen. Nu kunnen we dit proberen uit te breiden naar grotere n. We krijgen dan het volgende.

$$\begin{array}{rll} 5+1 \longleftrightarrow 2+1+1+1, & 4+2 \longleftrightarrow 2+2+1+1, & 3+3 \longleftrightarrow 2+2+2, \\ 4+1+1 \longleftrightarrow 3+1+1+1, & 3+2+1 \longleftrightarrow 3+2+1, & 2+2+2 \longleftrightarrow 3+3, \\ 3+1+1+1 \longleftrightarrow 4+1+1, & 2+2+1+1 \longleftrightarrow 4+2. & \end{array}$$

Het valt op dat deze bijectie een involutie lijkt te zijn. Verder zie je door naar $(n, k) = (6, 2)$ te kijken dat het op-een-na hoogste getal aan de linkerkant gelijk is aan het aantal tweeën aan de rechterkant. Dit lijkt voor $(n, k) = (6, 3)$ niet waar te zijn, maar wat daar wel waar is, is dat het op-een-na hoogste getal gelijk is aan het aantal getallen rechts dat minstens 2 is. Dit blijkt waar te zijn voor alle gevallen tot nu toe.

Nu kunnen we een vermoeden maken voor een bijectie. Als we een partitie $n = p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 2 + \ldots + p_n \cdot n$ van n hebben aan de rechterkant, dan nemen we aan de linkerkant een partitie $n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, waarbij b_i het aantal elementen links is dat groter is dan of gelijk is aan i, dus $b_i = p_i + p_{i+1} + \ldots + p_n$. We zien dat we zo precies een bijectie krijgen, die ook een involutie blijkt te zijn.

Een manier waarop men dit inzichtelijk maakt is te kijken naar zogenoemde Young tableaus. In het linkerdiagram zie je het tableau horend bij de partitie $3+2+2+1$ van 8 en aan de rechterkant zie je het tableau van de partitie $4+3+1$ van 8. De bijectie die we net hebben omschreven komt precies neer op het spiegelen van het tableau in de hoofddiagonaal.



□

Voorbeeldopgave 2. *Geldige haakjesuitdrukkingen zijn als volgt recursief gedefinieerd: de lege string is een geldige haakjesuitdrukking en voor elk tweetal haakjes uitdrukkingen A en B is $(A)B$ een geldige haakjesuitdrukking. Voorbeelden zijn: (())() en ((()())(()())). Een voorbeeld van een haakjesuitdrukking die niet geldig is, is: (()))((). Geef een bijectie tussen de verzameling van haakjes uitdrukking met n paren haakjes en de verzameling van paden in het rooster van $(0, 0)$ naar (n, n), bestaande uit stappen omhoog en naar rechts, die niet boven de hoofddiagonaal uit komen. Dit aantal noemen we C_n.*

Bewijs. Haakjesuitdrukkingen blijken precies uitdrukkingen te zijn, bestaande uit de symbolen) (*haakje sluiten*) en ((*haakje openen*), zodat op elk punt het aantal haakjes openen minus het aantal haakjes sluiten tot dan toe, niet-negatief is, en het totaal aantal haakjes openen en sluiten gelijk is. Het bewijs dat met inductie gaat, laten we over aan de lezer.

Met deze omschrijving is het niet lastig om een bijectie te vinden met de hierboven genoemde paden van $(0, 0)$ naar (n, n). We laten een stap naar rechts namelijk corresponderen met een haakje openen en een stap omhoog met een haakje sluiten. Op die manier krijgen we een bijectie, zonder dat we überhaupt geteld hebben hoeveel haakjesuitdrukkingen er zijn of hoeveel paden. □

Het aantal haakjesuitdrukkingen is uit te drukken in een binomiaalcoëfficiënt. Dit past eigenlijk meer in het setje over binomiaalcoëfficiënten en zullen we op dit moment niet behandelen, maar het is wel goed om te weten. Het is namelijk gelijk aan $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Dit kan overigens bewezen worden door een bijectie te geven tussen $(n + 1) \cdot C_n$ en $\binom{2n}{n}$.

Deze getallen hebben veel combinatorische interpretaties. In het bijzonder hebben we het volgende: een triangulatie van een veelhoek, is een verdeling van de veelhoek in driehoeken door een aantal diagonalen te trekken, die elkaar niet snijden in het inwendige van de veelhoek. Het aantal manieren om een regelmatige $(n+2)$-hoek te trianguleren is gelijk aan C_n.

Het is absoluut niet de bedoeling dat jullie deze feitjes gebruiken voor de onderstaande opgaven.

Opgaven

Partities

Opgave 1. *Zij $p(n)$ het aantal partities van n. Laat zien dat $p(n) - p(n-1)$ gelijk is aan het aantal partities van n, waarvan elk van de delen grootte minstens 2 heeft.*

Opgave 2. *Zij $n \geq 2$. Bewijs dat de som van het aantal verschillende delen in partities van n gelijk is aan het aantal partities van $n-2$.*

Opgave 3. *Laat zien dat het aantal partities van n gelijk is aan het aantal partities van $2n$ in n delen.*

Opgave 4. *Laat zien dat het aantal partities van n in delen van verschillende grootte gelijk is aan het aantal partities van n in delen van oneven grootte.*

Opgave 5. *Zij $p(n)$ het aantal partities van n. Bewijs dat voor $n \geq 2$ geldt dat*

$$p(n) - 2p(n-1) + p(n-2)$$

niet-negatief is.

Opgave 6. *Voor een partitie p schrijven we $f(p)$ voor het aantal enen in p en $g(p)$ voor het aantal verschillende getallen in p. Bewijs*

$$\sum_p f(p) = \sum_p g(p),$$

waarbij we sommeren over alle partities p van een vast getal n.

Opgave 7. *Bewijs dat het aantal geordende sommen van n in delen van grootte 1 of 2 gelijk is aan het aantal geordende sommen van $n+2$ met delen strikt groter dan 1.*

Bijecties met haakjesuitdrukkingen

Opgave 8. *We beginnen met een rij van n muntjes. Daarbovenop leggen we een aantal muntjes, precies midden tussen twee muntjes. Daarbovenop leggen we weer muntjes, enzovoorts. De wetten van de zwaartekracht moeten gelden: een muntje mag alleen bovenop twee aan elkaar grenzende muntjes liggen. Laat zien dat het aantal manieren om zulke stapels te maken gelijk is aan C_n door een bijectie te construeren.*

Opgave 9. *Een Dyck-pad van lengte n is een pad in $\mathbb{Z}^2$ dat start op $(0,0)$ bestaat uit n stappen van $(1,1)$ en n stappen van $(1,-1)$ en nooit onder de x-as komt. Een vrije val is een maximale deelrij van stappen omlaag die eindigt op de x-as. Het Dyck-pad*

$$(0,0) \mapsto (1,1) \mapsto (2,2) \mapsto (3,1) \mapsto (4,2) \mapsto (5,3) \mapsto (6,2) \mapsto (7,1) \mapsto (8,0) \mapsto (9,1) \mapsto (10,0)$$

heeft twee vrije vallen, een van lengte 3 en een van lengte 1. Bewijs dat er een bijectie is tussen de Dyck-paden van lengte n zonder vrij val van even lengte en Dyck-paden van lengte $n-1$. Laat bovendien zien dat er C_{n-1} zulke paden zijn.

Andere bijecties

Opgave 10. *Een perfecte partitie van een natuurlijk getal n is een rij $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k$ zo dat $\sum_i a_i = n$ en ieder natuurlijk getal $1 \leq m \leq n$ op een unieke manier geschreven kan worden als de som van een aantal a_i. Als er verschillende a_i gelijk zijn, dan beschouwen we deze als ononderscheidbaar.*
Een geordende factorisatie van een natuurlijk getal n is het aantal manieren waarop we n als een geordend product van factoren groter dan 1 kunnen schrijven.
Bewijs dat het aantal perfecte partities van n gelijk is aan het aantal geordende factorisaties van $n+1$.

Opgave 11. *Gegeven is een enkelvoudige graaf, waarin we een aantal punten willen kleuren zo dat voor ieder punt geldt dat of dit punt of precies één van zijn buren gekleurd is. Bewijs dat als we dit op meerdere manieren kunnen doen we altijd hetzelfde aantal punten moeten kleuren.*

Opgave 12. *(a) Bewijs dat er $\binom{n-k+1}{k}$ deelverzamelingen van $\{1, 2, \ldots, n\}$ zijn met precies k elementen die geen twee opeenvolgende getallen bevatten.*

(b) Vind het aantal deelverzamelingen van $\{1, 2, \ldots, n\}$ waarin geen twee opeenvolgende getallen in zitten als som van binomiaalcoëfficiënten. Doe dit door het aantal van zulke deelverzamelingen van een vaste grootte te tellen.

Opgave 13. *We beschouwen een gelijkzijdige driehoek met zijdelengte n. In de driehoek is een rooster gemaakt bestaande uit gelijkzijdige driehoekjes met zijdelengte 1, op de manier die je zou verwachten. Bepaal het aantal parallellogrammen dat begrensd is door lijnstukken in dit rooster.*

Opgave 14. *Voor een natuurlijk getal n is $\pi(n)$ het aantal verzamelingen van natuurlijke getallen die voldoen aan de eis dat de som van de elementen gelijk is aan n. Verder is $\pi_2(n)$ het aantal van deze verzamelingen die in ieder geval een tweemacht bevatten. Bewijs dat $\pi_2(n+1) = \pi(n)$. In deze opgave wordt 1 gezien als een tweemacht.*

Opgave 15. *Een binair rijtje van lengte n is een rijtje van n getallen die allemaal 0 of 1 zijn. Zij a_n het aantal binaire rijtjes van lengte n waarvan geen drietal opeenvolgende termen gelijk is aan 0, 1, 0 (op die volgorde). Zij b_n het aantal binaire rijtjes van lengte n waarvan geen viertal opeenvolgende termen gelijk is aan 0, 0, 1, 1 of 1, 1, 0, 0 (op die volgorde). Laat zien dat $b_{n+1} = 2a_n$.*

Opgave 16. *Zij n positief geheel. Elk punt $(x, y) \in \mathbb{Z}^2_{\geqslant 0}$ met $x + y < n$ wordt rood of blauw gekleurd. Er wordt voldaan aan de volgende voorwaarde: als (x, y) rood is, dan zijn ook alle punten (x', y') met $x' \leqslant x$ en $y' \leqslant y$ rood gekleurd. Zij A het aantal manieren om n blauwe punten te kiezen met verschillende x-coördinaten. Zij B het aantal manieren om n blauwe punten te kiezen met verschillende y-coördinaten. Laat zien dat $A = B$.*

Opgave 17. *Zijn $k \geqslant n$ positief geheel met $k - n$ even. We beschouwen $2n$ lampen, genummerd van 1 tot en met $2n$ die allemaal aan of uit staan. Aan het begin zijn alle lampen uit. In elke stap wordt een lamp aan of juist uit gezet. Zij N het aantal opeenvolgingen van k stappen die resulteren in een staat waarin de eerste n lampen aan zijn en de laatste n lampen uit. Zij M het aantal opeenvolgingen van k stappen die resulteren in een staat waarin de eerste n lampen aan staan en de laatste n lampen nooit aangezet zijn. Bepaal N/M. Hint: kleine gevallen.*