Week 20: Het nut van integreren (set 2)

Er zijn een verschillende situaties waarin je kan integreren terwijl de opgave je dat helemaal niet doet vermoeden. We noemen een paar situaties:

- Zie je ergens een +1 in de noemer? Schrijf dan:
$$\frac{1}{n+1} = \int_0^1 x^n \, dx.$$
- Integratie kan soms gezien worden als een inproduct. Heb je dus een som (bijvoorbeeld van functies) $\sum f_i$ en je wil alleen iets zeggen over f_k, vind dan een functie g zo dat $\int_I f_i g \, dx = 0$ voor $i \neq k$.
- Soms kom je functies tegen van de vorm
$$\frac{f(bx) - f(ax)}{x}.$$
Als f' de afgeleide is van f dan kan je dit ook schrijven als
$$\int_a^b f'(tx) \, dt.$$
- In een ander uitzonderlijk geval kan je een opgave wel oplossen als je een functie door een rijtje vervangt. Onder deze transformatie veranderen integralen in sommen.
- Soms is het handig om $\frac{1}{m+n}$ te schrijven als
$$\int_0^\infty e^{-t(m+n)} \, dt.$$

Bij sommige van deze gevallen komt de opgave uiteindelijk neer op het verwisselen van integraaltekens, of het omdraaien van een integraal en een som. Dat mag natuurlijk niet altijd, maar het is over het algemeen het gemakkelijkst om te doen alsof het wel mag. Als je dan tijd over hebt, kan je er altijd nog een beetje over nadenken.
De nuttigste manier om te concluderen dat het allemaal wel mag is de volgende.

Stelling 1 (Fubini) *Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een continue functie en beschouw intervallen $I, J \subseteq \mathbb{R}$. Als een van de integralen*
$$\int_I \int_J |f(x,y)| \, dx \, dy \quad \text{en} \quad \int_J \int_I |f(x,y)| \, dy \, dx$$
bestaat, is alles geoorloofd.

De conclusie is hetzelfde als f in een variabele (of allebei) discreet is. Dan wordt de integraal uiteraard wel een som.

Opgaven

Opgave 1 (Putnam) *Laat a_i met $0 \leq i \leq n$ een rij reële getallen zijn die voldoet aan $\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} = 0$. Bewijs dat het polynoom*
$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$
een reële wortel heeft.

Opgave 2 *Laat zien dat*

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{n}.$$

Opgave 3 (Putnam) *Bereken de volgende integraal*

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(\pi x)-\arctan x}{x}\,dx.$$

Opgave 4 *Bereken*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}.$$

Opgave 5 *Gegeven zijn natuurlijke getallen m en n. Bewijs dat*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k+m+1}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{k+n+1}.$$

Opgave 6 (IMC) *Bewijs dat iedere functie van de vorm*

$$f(x)=a_0+\cos x+\sum_{n=2}^{N}a_n\cos(nx)$$

met $|a_0|<\frac{1}{2}$ zowel positieve als negatieve waarden aanneemt op het interval $[0,2\pi)$.

Opgave 7 *Bewijs de volgende gelijkheid*

$$\sum_{t=0}^{n-k-1}\frac{(-1)^t}{k+t+1}\binom{n-k-1}{t}=\frac{k!(n-k-1)!}{n!}$$

voor natuurlijke n en k die voldoen aan $n-k\geq 1$.

Opgave 8 (IMC) *Zij n een positief geheel getal en $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$ de functie die x naar $\frac{\sin x}{x}$ stuurt. Bewijs dat*

$$\left|f^{(n)}(x)\right|<\frac{1}{n+1}$$

voor alle $x\in\mathbb{R}_{>0}$.

Opgave 9

a) Vind een functie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zo dat

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

gelijk is aan 0 precies als $b-a$ geheel is.

b) Een rechthoek is opgedeeld in eindig veel kleinere rechthoeken, zo dat alle zijden evenwijdig lopen aan de zijden van de grotere rechthoek. Er is bovendien gegeven dat alle kleinere rechthoeken een gehele lengte of een gehele breedte hebben. Bewijs dat de grote rechthoek ook een gehele lengte of gehele breedte heeft.

Opgave 10 *Bewijs dat de volgende gelijkheid geldt*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{m+n}=\int_0^\infty\frac{1}{(1+e^t)^2}\,dt.$$

Gebruik die integraal om de dubbele som uit te rekenen.

Opgave 11 *Zijn $a_1,\dots,a_n$ positieve reële getallen en $x_1,\dots,x_n$ reële getallen. Laat zien dat*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_ix_j}{a_i+a_j}\geq 0.$$