Week 29: Grafentheorie

Deze set gaat over grafentheorie. We zullen eerst de nodige noties moeten introduceren.

Een *graaf* $G = (V, E)$ bestaat uit een verzameling V van *punten* of *knopen* en een verzameling E van *zijden* of *kanten* die tussen twee verschillende punten lopen. Als er niets gezegd wordt, is een graaf *simpel*, i.e. de graaf heeft tussen elk tweetal punten hooguit een zijde. Het *complement* $\overline{G}$ van een graaf is een graaf met dezelfde puntenverzameling, waarbij er een lijn van i naar j loopt dan en slechts dan als er geen lijn van i naar j loopt in G.

In een graaf heeft elke knoop een *graad*. Dat is het aantal kanten dat in die knoop komt. Een *pad* in een graaf is een rij punten, die achtereenvolgens verbonden worden door kanten. Een *cykel* is een pad dat begint en eindigt in hetzelfde punt en dat typisch geen punten dubbel bevat.

Een niet-lege graaf heet *samenhangend* als er tussen elk tweetal punten een pad loopt. Een *boom* is een minimale samenhangende graaf, i.e. een graaf die samenhangend is en dat niet meer is als je een van de kanten weglaat.

Een graaf heet *bipartiet* als je de knopenverzameling in twee deelverzamelingen V_1 en V_2 kunt partitioneren zodat er geen zijden lopen tussen de punten in V_1 en tussen de punten in V_2.

Een *kleuring* van een graaf is een kleuring van de knopen zodat buurknopen niet dezelfde kleur hebben. Een *matching* is een graaf is een verzameling $E' \subset E$ van kanten in de graaf, zodat er geen knoop is waar twee kanten van E' samenkomen. Een matching heet *perfect* als alle knopen aan een van de kantan van E' raakt, i.e. elke knoop is gekoppeld aan een unieke buurknop.

Nu zijn er enkele bekende stellingen in de grafentheorie die van pas zouden kunnen komen.

Stelling 1 (Vierkleurenstelling) *Een graaf die je kunt tekenen in het Euclidische vlak kan met hooguit vier kleuren gekleurd worden.*

Stelling 2 (Hall's huwelijksstelling) *Zij G een bipartiete graaf met $V = V_1 \sqcup V_2$. Dan heeft G een matching die alle punten van V_1 omvat dan en slechts dan als voor elke deelverzameling $V' \subset V_1$ het aantal gemeenschappelijke buren van V' (aan de rechterkant dus) minstens $|V'|$ is.*

Opgaven

Opgave 1 *Zij G een graaf waarvan elke knoop graad minstens 2 heeft. Laat zien dat G een cykel heeft.*

Opgave 2 *Zij G een graaf met graden $d_1, \ldots, d_n$. Laat zien dat $\sum_{i=1}^{n} d_i$ even is.*

Opgave 3 *Zij G een onsamenhangende graaf. Laat zien dat $\overline{G}$ samenhangend is.*

Opgave 4 *Zij G een graaf. Laat zien dat G bipartiet is dan en slechts dan als G geen cykel heeft van oneven lengte.*

Opgave 5 *Zij $G = (V, E)$ een samenhangende graaf. Laat zien dat G een boom is dan en slechts dan als G geen cykels bevat dan en slechts dan als $|E| = |V| - 1$.*

Opgave 6 (Finale NWO 2009) *Aan een tennistoernooi nemen minimaal drie spelers deel. Elke speler speelt precies een wedstrijd tegen elke andere speler en bovendien wint elke speler ten minste een wedstrijd van alle wedstrijden die hij speelt. (Er bestaat geen remise bij tennis.) Bewijs dat er drie spelers A, B en C zijn waarvoor geldt: A wint van B, B wint van C en C wint van A.*

Opgave 7 *Laat zien dat de volledige graaf op vijf punten, K_5, niet te tekenen is in het Euclidische vlak.*

Opgave 8 *Zij G een graaf. Laat zien dat er partitie $V = V_1 \sqcup V_2$ bestaat zodat voor elke knoop minstens de helft van zijn buren in de andere groep zit.*

Opgave 9 *Bekijk een tennistoernooi waarin ieder tweetal precies een onderlinge wedstrijd speelt. Iedere speler maakt een lijstje van de spelers waarvan hij gewonnen heeft of waarvaan een speler gewonnen heeft waar hij van gewonnen heeft. Bewijs dat er een speler is op wiens lijstje alle spelers staan.*

Opgave 10 (IMC 1965 A4) *Op een feest zijn jongens en meisjes. Geen enkele jongen danst met elk meisje, maar elk meisje danst met minstens een jongen. Laat zien dat er twee koppels mj en $m'j'$ zijn die gedanst hebben terwijl m niet gedanst heeft met j' en m' niet met j.*

Opgave 11 *Zij G een bipartiete graaf waarin elke knoop dezelfde graad heeft. Laat zien dat er een perfecte matching is in G.*

Opgave 12 *Zijn $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ natuurlijke getallen met $d_n < n$. Bewijs dat er een graaf is met graden $d_1, \ldots, d_n$ dan en slechts dan als er een graaf is met graden $d_1, \ldots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, \ldots, d_{n-1} - 1$.*

Opgave 13 *Zij n een natuurlijk getal. In een groep van $2n+1$ mensen, is elk paar bevriend of niet bevriend. Voor elke verzameling S van hooguit n mensen, is er een iemand buiten S die bevriend is met iedereen in S. Laat zien dat er minstens een iemand is die bevriend is met alle anderen.*

Opgave 14 *Zij G een samenhangende graaf met een even aantal kanten. Bewijs dat er pijlen op de kanten gezet kunnen worden zodat het aantal 'uitgaande pijlen' in elke knoop even is.*

Opgave 15 *Zij G een triangulatie van een vierkant. Kleur de knopen van G elk rood, wit of blauw. Bewijs dat het aantal facetten (vlakken/driehoeken) waarvan de drie hoekpunten verschillende kleur hebben even is.*

Opgave 16 *Bepaal het aantal opspannende bomen van $K_{n,m}$, de volledige bipartiete graaf met n punten links en m punten rechts, in termen van n en m.*

Opgave 17 *Zijn $A_1, \ldots, A_n$ verschillende deelverzamelingen van $\{1, \ldots, n\}$. Bewijs dat er een $i \in \{1, \ldots, n\}$ bestaat zodat $A_1 \setminus \{i\}, \ldots, A_n \setminus \{i\}$ verschillend zijn.*

Opgave 18 *Zij G een graaf. We beschouwen het volgende spel. Op elke knoop van de graaf is een lamp en een knop. Als je een knop indrukt, veranderen de lamp op die knoop en de lampen bij alle buurknopen van staat. In het begin staan alle lampen uit. Laat zien dat je door op de knoppen te drukken alle lampen aan kunt krijgen.*

Opgave 19 *Een geblindoekte goochelaar heeft een glas met daarin vijf kleuren knikkers. Een willekeurig persoon neemt twee knikkers uit het glas. Daarna haalt de assistent van de goochelaar nog een knikker uit het glas. De goochelaar krijgt de twee resterende knikkers te zien en vertelt het publiek welke twee knikkers de willekeurige persoon heeft. Hoe werkt deze truc en zijn generalisatie naar $2n+1$ verschillende knikkers, waarbij de willekeurige persoon er n pakt?*

Opgave 20 *Zij $x_1, \ldots, x_{kl+1}$ een rijtje van $kl+1$ verschillende reële getallen. Bewijs dat er een stijgende deelrij met minstens $k+1$ termen is of een dalende deelrij met minstens $l+1$ termen.* Hint: beschouw dit als kleuringsprobleem.

Opgave 21 (IMO 1983 shortlist) *Een land heeft 1983 steden. Elk paar steden is verbonden door een directe weg. Elke weg is eigendom van een van de tien wegbeheerders in het land. Laat zien dat er een cykel moet zijn van oneven lengte bestaande uit wegen die allemaal eigendom zijn van dezelfde beheerder.*

Opgave 22 *Er zijn* $2n$ *mensen in een kamer, waarbij elk paar bevriend of niet bevriend is. Twee spelers spelen een spel waarin ze alternerend een persoon uit de kamer kiezen die nog niet gekozen is en bevriend is met de vorige persoon die ze gekozen hebben. De laatste speler die een zet kan doen wint. De eerste speler mag in zijn eerste beurt elke persoon kiezen. Laat zien dat de tweede speler een winnende strategie heeft dan en slechts dan als de* $2n$ *mensen verdeeld kunnen worden in* n *disjuncte paren van bevriende mensen.*

Opgave 23 (IMO 2007) *Bij een wiskundewedstrijd zijn sommige deelnemers bevriend. Vriendschap is altijd wederzijds. Noem een groep deelnemers een kliek als elk tweetal bevriend is. Het aantal leden van een kliek is de grootte van de kliek. De grootste kliek bij de wiskundewedstrijd heeft even grootte. Laat zien dat je de deelnemers in twee zalen kunt verdelen, zodat in de ene zaal de grootste kliek dezelfde grootte heeft als de grootste kliek in de andere zaal.*