# Week 4: Ongelijkheden (set 2)

Deze week gaat over ongelijkheden. De belangrijkste ongelijkheid is de volgende.

**Stelling 1** *Voor alle reële $x$ geldt dat $x^2 \geq 0$. Er geldt uiteraard precies gelijkheid als $x = 0$.*

Deze ongelijkheid ligt aan de grondslag van veel andere ongelijkheden, waarvan de volgende een van de meest nuttige en veelzijdige is.

**Stelling 2 (De ongelijkheid van het rekenkundig en het meetkundig gemiddelde)** *Laat $a_1, \ldots, a_n$ niet-negatieve reële getallen zijn. Dan geldt*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

*en gelijkheid treedt op enkel en alleen als $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.*

Als de $a_i$'tjes positief zijn, dan kunnen we deze ongelijkheid uitbreiden.

**Stelling 3 (De ongelijkheid van het meetkundig en het harmonisch gemiddelde)** *Laat $a_1, \ldots, a_n$ positieve getallen zijn. Dan geldt*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

*Gelijkheid geldt precies als $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.*

Als je deze ongelijkheden wil gebruiken, dan kan het handig zijn om op de volgende zaken te letten:

- Let op de richting van het teken: dit geeft je een vermoeden waar je een rekenkundig of juist een meetkundig gemiddelde kunt verwachten.
- Onderzoek wanneer er gelijkheid geldt. Pas nu alleen ongelijkheden toe die gelijkheid geven onder die voorwaarde.
- Laat je leiden door de expliciete getallen (factoren en exponenten) in de uitdrukkingen: staan er veel drieën en driemachten, ga dan niet de ongelijkheden toepassen op vier termen.
- Let altijd goed op op welke getallen je een ongelijkheid toepast! Het is heel belangrijk dat je bovenstaande alleen op niet-negatieve (danwel positieve) getallen toepast.

## Opgaven

**Opgave 1** *Laat zien dat voor alle natuurlijke $n$ geldt dat*

$$(n+1)^n \geq 2^n n!.$$

**Opgave 2** *Gegeven zijn niet-negatieve getallen $a$ en $b$ met $ab = 1$. Bewijs dat*

$$a + b \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

**Opgave 3** *Gegeven zijn positieve reële getallen $a$ en $b$ die voldoen aan $a < b$. Bewijs dat*

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\, dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

**Opgave 4** *Laat zien dat voor positieve reële getallen $a$, $b$ en $c$ geldt dat*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

**Opgave 5** *Zijn $x_1, \ldots, x_n$ reële getallen. Laat zien dat*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min\{i, j\} x_i x_j \geq 0.$$

**Opgave 6** *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie zodanig dat voor elk geheel getal $k \geq 1$ het volgende geldt:*

$$\int_0^k f(x)^2 \, dx = \int_0^k f(x) f(k-x) \, dx.$$

*Bewijs dat $f(2013) = f(2014)$.*

**Opgave 7** *Bewijs dat voor alle $a, b, c \geq 0$ geldt dat*

$$a^6 b + b^6 c + c^6 a \geq a^4 b c^2 + b^4 c a^2 + c^4 a b^2.$$

**Opgave 8** *Laat $a, b, c$ positieve reële getallen zijn zodat $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Laat zien dat*

$$\frac{1}{\sqrt{a^3 + b}} + \frac{1}{\sqrt{b^3 + c}} + \frac{1}{\sqrt{c^3 + a}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

**Opgave 9** *Gegeven zijn niet-negatieve $a_i$ voor $1 \leq i \leq n$ die voldoen aan $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Bewijs dat*

$$(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3) \ldots (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) \geq 4^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n.$$

**Opgave 10** *Zij $n \geq 2$ een geheel getal en laat $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reële getallen zijn zodat*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = 1.$$

*Bepaal voor elk geheel getal $k$, $1 \leq k \leq n$ de maximale waarde van $|x_k|$.*

**Opgave 11** *Bewijs voor positieve $a$, $b$ en $c$ met $abc = 1$ dat*

$$\frac{a^3}{(b+1)(c+1)} + \frac{b^3}{(c+1)(a+1)} + \frac{c^3}{(a+1)(b+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

**Opgave 12** *Zijn $a_1, \ldots, a_n$ positieve reële getallen en $x_1, \ldots, x_n$ reële getallen. Laat zien dat*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{a_i + a_j} \geq 0.$$