

Week 5: Polynomen (set 1)

- Polynomen zijn formele expressies van de vorm $c_0 + c_1 \cdot x + \dots + c_n \cdot x^n$, waarbij de coëfficiënten c_i in een ring zitten (bijvoorbeeld $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ of \mathbb{C}). Polynomen hebben een graad, de grootste macht van x die voorkomt in het polynoom. Het nulpolynoom heeft geen graad, of soms zegt men ook wel dat het graad $-\infty$ heeft.
- Met polynomen kun je staartdeling uitvoeren. Je krijgt dan, net als met gehele getallen een quotiënt en een rest. Als je x^3 bijvoorbeeld deelt door $x^2 + 1$ dan vind je x als quotiënt en $-x$ als rest: $x^3 = x \cdot (x^2 + 1) - x$. De rest moet van lagere graad zijn dan hetgene waar je door deelt.
- Hier volgen een aantal nuttige resultaten die bewezen kunnen worden door middel van deling met rest.

Stelling 1 *Zij P een polynoom met coëfficiënten in een lichaam F . Zij $a \in F$. Dan geldt $P(a) = 0$ dan en slechts dan als $P(x) = Q(x)(x - a)$ voor een zeker polynoom Q met coëfficiënten in F .*

Stelling 2 *Zij $P \neq 0$ een polynoom met coëfficiënten in een lichaam. Dan is het aantal nulpunten van P van boven begrensd door de graad van P .*

- Als je een polynoom krijgt, dan is het altijd zinvol om naar ontbindingen danwel nulpunten te zoeken. Probeer wat kleine getallen uit, zoek naar verschillen van kwadraten, et cetera.
- Moet je een polynomiale gelijkheid bewijzen in meerdere variabelen, beschouw het als polynoom in een van de variabelen en bewijs dat beide kanten dezelfde nulpunten hebben.
- Ten slotte geven we jullie nog de formules van Viëta. Als je de nulpunten van een polynoom weet, kun je namelijk de coëfficiënten berekenen. Bijvoorbeeld

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc.$$

In het algemeen worden de coëfficiënten van een polynoom met gegeven nulpunten gegeven door elementaire symmetrische uitdrukkingen in de nulpunten.

Opgaven

Opgave 1 *Bepaal alle reële polynomen $P(x)$ die voldoen aan $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$ en $P(0) = 0$.*

Opgave 2 *Zij n een even positief geheel getal. Het polynoom $p \in \mathbb{R}[X]$ heeft graad n en voldoet voor alle gehele $1 \leq k \leq n$ aan $p(-k) = p(k)$. Bewijs dat er een polynoom q met reële coëfficiënten bestaat zo dat*

$$p(x) = q(x^2).$$

Opgave 3 *Bewijs dat er geen polynoom $p(x)$ bestaat zodat $p(2x) = 1 + x \cdot p(x)$.*

Opgave 4 a) *Laat zien dat*

$$ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a) = (a - b)(b - c)(c - a)$$

zonder haakjes uit te werken.

b) *Factoriseer*

$$ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)$$

zonder haakjes uit te werken.

Opgave 5 Bekijk alle lijnen die de grafiek $y = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5$ in vier verschillende punten snijdt. Noem deze punten (x_i, y_i) voor $1 \leq i \leq 4$. Bewijs dat $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ onafhankelijk is van de gekozen lijn en vind deze waarde.

Opgave 6 Bepaal de determinant van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{pmatrix}$$

In het algemeen: gegeven n getallen x_i met $0 \leq i \leq n-1$. Wat is de determinant van de matrix gegeven door

$$M_{i,j} = x_i^j \quad \text{voor } 0 \leq i, j \leq n-1.$$

Opgave 7 Vind alle polynomen $p(x)$ met reële coëfficiënten zodat $p(x^2) = p(x) \cdot p(x+2)$.

Opgave 8 Laat A en B reële $n \times n$ -matrices zijn. Neem aan dat er $n+1$ verschillende reële getallen t_1, t_2, \dots, t_{n+1} bestaan zo dat de matrices

$$A + t_i B$$

alle $n+1$ nilpotent zijn. Bewijs dat A en B nilpotent zijn.

Opgave 9 Zij $p(x)$ een polynoom van graad n zodat $p(k) = 2^k$ voor alle $k = 0, 1, \dots, n$. Wat is $p(n+1)$?

Opgave 10 Beschouw het polynoom $p(x) = 5x^3 + 4x^2 - 8x + 6$. Stel dat $a, b, c \in \mathbb{R}$ de drie nulpunten zijn. Bepaal $a(1+b+c) + b(1+a+c) + c(1+a+b)$.

Opgave 11 Bewijs dat het polynoom $x^{2n} + x^n + 1$ deelbaar is door $x^2 + x + 1$ dan en slechts dan als $n \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Opgave 12 Zijn a, b en c de wortels van het polynoom $p(x) = 3x^3 - 14x^2 + x + 62$. Bepaal

$$\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3}.$$