Week 7: Extremenprincipe

Opgave 1 *Een groep van* 2016 *mensen zit aan een ronde tafel. Het blijkt dat voor iedereen geldt dat zijn of haar leeftijd gelijk is aan het gemiddelde van de leeftijden van de buren. Bewijs dat iedereen even oud is.*

Opgave 2 *Op een tennistoernooi speelt iedere tweetal spelers precies één keer tegen elkaar. Aan het eind van het toernooi maakt iedere speler één lijst met daarop zowel spelers die hij verslagen heeft als de spelers die verslagen zijn door iemand die hij verslagen heeft. Bewijs dat er een speler bestaat die een lijst heeft met daarop alle andere spelers.*

Opgave 3 *Zij V een niet-lege verzameling gehele getallen zodanig dat*

(i) als $x, y \in V$ dan ook $x - y \in V$;

(ii) als $x \in V$ dan zijn ook alle veelvouden van x element van V.

Bewijs dat V precies bestaat uit alle veelvouden van een zeker element $d \in V$.

Opgave 4 *Vind alle positieve oplossing van het stelsel*

$$x_1 + x_2 = x_3^2, \quad x_2 + x_3 = x_4^2, \quad x_3 + x_4 = x_5^2, \quad x_4 + x_5 = x_1^2, \quad x_5 + x_1 = x_2^2.$$

Opgave 5 *Een aantal positieve reële getallen staan op een blaadje zo dat de som van de paarsgewijze producten gelijk is aan* 1*. Bewijs dat je een van de getallen kan uitgummen zo dat de som van de overgebleven getallen kleiner is dan $\sqrt{2}$.*

Opgave 6 *Zij n een positief geheel getal. Definieer de functie $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door*

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Bewijs dat f_n geen reële nulpunten heeft.

Opgave 7 *In een groep studenten zijn sommige paren studenten vrienden en andere paren niet, zo dat er in ieder geval een vriendenpaar is en dat als twee studenten hetzelfde aantal vrienden hebben, dan hebben ze geen gemeenschappelijke vrienden. Bewijs dat er een student bestaat in deze groep met precies één vriend.*

Opgave 8 *Een groep van $2n$ personen voldoet aan de eigenschap dat iedereen een hekel heeft aan hoogstens $n - 1$ anderen en dat als persoon A een hekel heeft aan persoon B, dat dan ook persoon B een hekel heeft aan persoon A. Bewijs dat we deze personen aan een ronde tafel kunnen plaatsen zo dat er niemand naast iemand zit die hij niet mag.*

Opgave 9 *Gegeven zijn $2n$ punten in het vlak, geen drie hiervan op één lijn. De helft van deze punten zijn boerderijen, de andere helft waterputten. Bewijs dat er een bijectie tussen de boerderijen en de waterputten is, zodanig dat elke boerderij met de corresponderende put verbonden kan worden door middel van een kaarsrechte weg zonder dat deze wegen elkaar snijden.*

Opgave 10 *Elk van de 150 leden van de Tweede Kamer heeft precies één keer een ander lid geslagen. Bewijs dat het mogelijk is om een commissie van 50 Tweede-Kamerleden te vormen zodat geen van de commissieleden een ander commissielid heeft geslagen.*

Opgave 11 *Drie verschillende scholen hebben precies n leerlingen. Het is bekend dat iedere leerling precies $n + 1$ vrienden heeft op de andere twee scholen. Bewijs dat je van iedere school een leerling kan kiezen zo dat elke leerling in dit drietal bevriend is met de andere twee.*

Opgave 12 *Bekijk een convexe n-hoek. Er worden $m > n$ munten over de hoekpunten van deze figuur verdeeld. De volgende stap wordt nu herhaaldelijk uitgevoerd: er wordt een hoekpunt gekozen met daarop minstens 2 munten en de buren van dit hoekpunt krijgen beide een munt van de stapel op dit hoekpunt.*
Na een positief aantal k van deze stappen zijn we weer in de oorspronkelijke verdeling terug. Bewijs dat k een veelvoud van n is.

Opgave 13 *Op een planeet zijn precies 40 landen. In ieder drietal landen zijn er in ieder geval twee die geen diplomatieke relaties onderhouden. Bewijs dat er maximaal 800 ambassades op deze planeet zijn.*

Opgave 14 *Zij gegeven een eindige verzameling V van punten in het vlak zodanig dat ze niet allemaal op één lijn liggen. Bewijs dat er een lijn is die door precies twee punten van V gaat.*