Week 12: het karakteristieke polynoom en het minimumpolynoom

- Een vector $v \neq 0$ en een getal λ zijn respectievelijk een eigenvector en een eigenwaarde van een vierkante matrix A als geldt dat $Av = \lambda v$.
- Eigenwaarden zijn precies de nulpunten van het karakteristieke polynoom p_A.
- Er kunnen meerdere eigenwaarden bij een eigenvector zijn, maar dit aantal is altijd kleiner dan de multiplicteit van de eigenwaarde als nulpunt van p_A.
- De stelling van Cayley-Hamilton zegt dat het karakteristieke polynoom p_A van een matrix A voldoet aan $p_A(A)$.
- Alle polynomen P met $P(A)$ vormen een ideaal I en aangezien $\mathbb{R}[X]$ een hoofdideaaldomein is, bestaat er een uniek monisch polynoom m_A met $I = (m_A)$. Dit is het minimumpolynoom.
- Het polynoom m_A deelt het karakteristieke polynoom p_A. Bovendien is ieder nulpunt van p_A, dus elke eigenwaarde, ook een nulpunt van m_A.
- Vind een polynoom waar je matrix een 'nulpunt' van is. Daaruit volgen alle eigenwaarden! Kan je dat niet meteen, ga dan gewoon machten uitdrukken in dingen die je al weet.
- Een $n \times n$-matrix is diagonaliseerbaar dan en slechts dan als er n lineair onafhankelijke eigenvectoren zijn.
- Er zijn n lineair onafhankelijke eigenvectoren voor een $n \times n$-matrix als er voor alle eigenwaarden met multiplictiteit k er k lineair onafhankelijke eigenvectoren zijn.
- Een matrix is diagonaliseerbaar precies als het minimumpolynoom splitst in verschillende lineaire factoren en dus geen dubbele nulpunten heeft.

Opgaven

Opgave 1 *Bewijs dat de volgende uitspraken over een vierkante $n \times n$-matrix A equivalent zijn:*

(i) er bestaat een k met $A^k = 0$;

(ii) $A^n = 0$;

(iii) alle eigenwaarden van A zijn nul.

We zeggen in dit geval dat A nilpotent is.

Opgave 2 *Zij A een reële 2×2-matix die voldoet aan $A^5 = I$. Wat zijn de mogelijke combinaties van* $\det A$ *en* $\operatorname{Sp} A$*?*

Opgave 3 *Zij A een vierkante matrix.*

(a) Bewijs vanuit het karakteristieke polynoom dat als $\det A = 0$*, dat A dan niet inverteerbaar kan zijn.*

(b) Stel dat $\det A \neq 0$*. Bewijs dat A^{-1} bestaat door een polynoom p te vinden zo dat $p(A)A = I$.*

Opgave 4 *Zij A een reële $n \times n$-matrix die voldoet aan $A^2 + I = 0$. Bewijs dat n even is. Wat zijn de mogelijkheden voor de determinant van A?*

Opgave 5 *(a) Laat zien dat er voor elke $m \in \mathbb{N}$ een reële $m \times m$-matrix bestaat die voldoet aan $A^3 = A + I$.*

(b) Bewijs dat $\det A > 0$ *voor iedere* $m \times m$*-matrix die voldoet aan* $A^3 = A + I$.

Opgave 6 *Zij* B *een* 2×2*-matrix. Bewijs dat*

$$\mathrm{Sp}(B^2) = Sp(B)^2 - 2\det B.$$

Opgave 7 *Zij* A *een* 3×3*-matrix met* $p_A(t) = t^3 + at + b$. *Druk* p_{A^2} *uit in* a *en* b.

Opgave 8 *Zij* A *een* $n \times n$*-matrix met* $A^2 = I$. *Bewijs dat* $\mathrm{Rg}(A + I) + \mathrm{Rg}(A - I) = n$.

Opgave 9 *Een vierkante matrix* X *is gedefinieerd door* $X_{12} = X_{23} = X_{31} = 1$ *en op de overige plekken alleen maar nullen. Definieer* $Y = aI + bX + cX^2$. *Bewijs dat* $Y^{2004} = 0$ *impliceert dat* $Y = 0$.

Opgave 10 *Zij* A *een* $n \times n$*-matrix zo dat* $3A^3 = A^2 + A + I$. *Laat zien dat de rij* A^k *convergeert naar een idempotente matrix.*

Opgave 11 *Bestaat er een reële* 3×3*-matrix* A *zo dat* $\mathrm{Sp}\, A = 0$ *en* $A^2 + A^t = I$*?*

Opgave 12 *Laat* A *en* B *twee* 2×2*-matrices zijn, beiden met determinant gelijk aan* 1. *Bewijs dat*

$$\mathrm{Sp}(AB) + \mathrm{Sp}(AB^{-1}) = \mathrm{Sp}\, A\, \mathrm{Sp}\, B.$$

Opgave 13 *Zij* G *een eindige groep van reële* $n \times n$*-matrices* $\{M_i\}$ *met* $1 \leq i \leq r$, *waarbij de groepstructuur wordt gegeven door matrixvermenigvuldiging. Stel dat* $\sum_{i=1}^r \mathrm{Sp}(M_i) = 0$. *Bewijs dat* $\sum_{i=1}^r M_i$ *de nulmatrix is.*

Opgave 14 *Zij* A *een* $n \times n$*-matrix met gehele elementen. Stel dat*

$$p^2 A^{p^2} = q^2 A^{q^2} + r^2 I_n$$

waar I_n *de* $n \times n$*-identiteitsmatrix is en* p, q *en* r *natuurlijke getallen met* r *oneven en* $p^2 = q^2 + r^2$. *Bewijs dat* $|\det A| = 1$.

Opgave 15 *Zij* A *een reële* $n \times n$*-matrix. Voor ieder natuurlijk getal* k *definiëren we* $A^{[k]}$ *als de matrix verkregen door ieder element van* A *tot de macht* k *te verheffen. Bewijs dat als* $A^k = A^{[k]}$ *voor* $k = 1, 2, \ldots, n + 1$ *dat dan* $A^k = A^{[k]}$ *geldt voor alle* $k \geq 1$.

Opgave 16 *Zij* M *een* 3×3 *magisch vierkant, dat wil zeggen een* 3×3*-matrix waarin de som van alle getallen in iedere rij, kolom en ieder van de twee hoofddiagonalen hetzelfde is.*
Laat zien dat voor ieder oneven natuurlijk getal n *de matrix* M^n *een magisch vierkant is.*