Week 13: Ongelijkheden I

Deze week gaat over ongelijkheden. De belangrijkste ongelijkheid is de volgende.

Stelling 1 *Voor alle reële x geldt dat $x^2 \geq 0$. Er geldt uiteraard precies gelijkheid als $x = 0$.*

Deze ongelijkheid ligt aan de grondslag van veel andere ongelijkheden, waarvan de volgende een van de meest nuttige en veelzijdige is.

Stelling 2 (De ongelijkheid van het rekenkundig en het meetkundig gemiddelde) *Laat $a_1, \ldots, a_n$ niet-negatieve reële getallen zijn. Dan geldt*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

en gelijkheid treedt op enkel en alleen als $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Als de a_i'tjes positief zijn, dan kunnen we deze ongelijkheid uitbreiden.

Stelling 3 (De ongelijkheid van het meetkundig en het harmonisch gemiddelde) *Laat $a_1, \ldots, a_n$ positieve getallen zijn. Dan geldt*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Gelijkheid geldt precies als $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Als je deze ongelijkheden wil gebruiken, dan kan het handig zijn om op de volgende zaken te letten:

- Let op de richting van het teken: dit geeft je een vermoeden waar je een rekenkundig of juist een meetkundig gemiddelde kunt verwachten.
- Onderzoek wanneer er gelijkheid geldt. Pas nu alleen ongelijkheden toe die gelijkheid geven onder die voorwaarde.
- Laat je leiden door de expliciete getallen (factoren en exponenten) in de uitdrukkingen: staan er veel drieën en driemachten, ga dan niet de ongelijkheden toepassen op vier termen.
- Let altijd goed op op welke getallen je een ongelijkheid toepast! Het is heel belangrijk dat je bovenstaande alleen op niet-negatieve (danwel positieve) getallen toepast.

Opgaven

Opgave 1 *Bewijs dat voor reële x en y geldt dat*

$$4x^2 + 9y^2 \geq 12xy.$$

Opgave 2 *Laat $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeven zijn. Bepaal het minimum van de functie $f(x) = \frac{a+bx^4}{x^2}$ en bepaal voor welke waarden van x deze waarde wordt aangenomen.*

Opgave 3 *Bewijs dat voor niet-negatieve s en t met $st = 1$ geldt dat*

$$(t + 1)(s + 1) \geq 4.$$

Opgave 4 *Bewijs dat de ongelijkheid van het harmonische en het meetkundige gemiddelde volgt uit de ongelijkheid van het meetkundige en het rekenkundige gemiddelde.*

Opgave 5 *Bewijs dat voor alle reële x, y en z geldt dat*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

Opgave 6 *Bewijs dat voor alle reële x, y en z geldt dat*

$$x^4 + y^4 + z^2 \geq \sqrt{8}xyz.$$

Opgave 7 *Bewijs dat voor reële x, y, z geldt $x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}$. Wanneer geldt er gelijkheid?*

Opgave 8 *Gegeven dat niet-negatieve x, y en z voldoen aan $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 8$. Bewijs dat $xyz \leq 1$.*

Opgave 9 *Zij n een natuurlijk getal en bekijk n positieve reële getallen x_i en definieer $x_{n+1} = x_1$. Bewijs dat*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}} \geq n.$$

Opgave 10 *Zij n een natuurlijk getal en bekijk n positieve reële getallen x_i. Bewijs dat*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq n^2.$$

Opgave 11 *Bewijs dat voor alle positieve a, b en c geldt dat*

$$\frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b} \leq \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Opgave 12 *Laat zien dat voor alle positieve x, y, z en w geldt dat*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z} + \frac{16}{w} \geq \frac{64}{x + y + z + w}.$$

Opgave 13 *Laat zien dat voor alle natuurlijke n geldt dat*

$$(n + 1)^n \geq 2^n n!.$$

Opgave 14 *Gegeven zijn positieve reële getallen a en b die voldoen aan $a < b$. Bewijs dat*

$$\int_a^b (x^2 + 1)e^{-x^2}\, dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

Opgave 15 *Gegeven zijn niet-negatieve getallen a en b met $ab = 1$. Bewijs dat*

$$a + b \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Opgave 16 *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie zodanig dat voor elk geheel getal $k \geq 1$ het volgende geldt:*

$$\int_0^k f(x)^2\, dx = \int_0^k f(x)f(k - x)\, dx.$$

Bewijs dat $f(2013) = f(2014)$.

Opgave 17 *Laat zien dat voor positieve reële getallen a, b en c geldt dat*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

Opgave 18 *Gegeven zijn niet-negatieve a_i voor $1 \leq i \leq n$ die voldoen aan $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Bewijs dat*

$$(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)\ldots(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) \geq 4^{n-1}a_1a_2\ldots a_n.$$