Opgaven week 17: recursie

Opgave 1. *Zij n een natuurlijk getal. Laat S_n en T_n het aantal manieren zijn om een $2 \times n$-pad te betegelen met 2×1-tegels, danwel een $1 \times n$-pad te betegelen met 2×1- en 1×1-tegels. Het is toegestaan om de tegels te draaien.*

Bewijs dat $S_n = T_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en laat zien dat dit bovendien gelijk is aan F_n, waar F_n de rij van Fibonnaci is met $F_0 = F_1 = 1$.

Opgave 2. *Gegeven $a_n = (n^2+1)3^n$, vind een recursie $a_n + pa_{n+1} + qa_{n+2} + ra_{n+3} = 0$.*

Opgave 3. *Een rij gehele getallen is gedefinieerd door $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ en*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + 1$$

voor $n \geq 3$. Bepaal a_{2015}.

Opgave 4. *Definieer a_n door $a_0 = \alpha$, $a_{n+1} = 2a_n - n^2$. Voor welke α bestaat de rij uit enkel positieve termen?*

Opgave 5. *Bewijs dat de rij van Fibonacci periodiek is modulo 5 met periode 20. Het is verboden om expliciet te bereken dat $F_{20} \equiv F_0 \mod 5$ en $F_{21} \equiv F_1 \mod 5$.*

Opgave 6. *Vind een directe formule voor de elementen van de rij $(x_n)_{n\geq 0}$ gedefinieerd door $x_0 = 3$, $x_1 = 4$ en*

$$(n+1)(n+2)x_n = 4(n+1)(n+3)x_{n-1} - 4(n+2)(n+3)x_{n-2} \quad \text{voor } n \geq 2.$$

Opgave 7. *Voor alle positieve gehele getallen m en n laat $f(m,n)$ het aantal rijtjes $(x_1, \ldots, x_n)$ van gehele (niet noodzakelijk positieve!) getallen zijn zodat $|x_1| + \ldots + |x_n| \leq m$. Laat zien dat $f(m,n) = f(n,m)$.*

Opgave 8. *De rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ van gehele getallen is gegeven door*

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_1 = 1, \\ a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n \quad \text{vor alle } n \geq 0. \end{cases}$$

Bewijs dat $a_p \equiv 1 \mod p$ voor alle priemgetallen p.

Opgave 9. *Vind alle functies $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die voldoen aan*

$$19f(x) - 17f(f(x)) = 2x$$

voor alle $x \in \mathbb{Z}$.

Opgave 10. *Zij m het kleinste gehele getal groter dan $(1+\sqrt{3})^{2n}$. Laat zien dat m deelbaar is door 2^{n+1}.*

Opgave 11. *Zij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een onbegrensde en strikt stijgende rij van positieve reële getallen zo dat het rekenkundig gemiddelde van de vier termen $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$ ook een element van de rij is. Bewijs dat de rij $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ convergeert en vind de mogelijke waarden van de limiet.*

Opgave 12. *Gegeven is een positief geheel getal m en $n = 2^m - 1$. De $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ over $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ is gegeven door $a_{i,j} = 1$ als $|i-j| = 1$ en $a_{i,j} = 0$ anders. Laat zien dat A nilpotent is.*

Opgave 13. *Bewijs dat*

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

geheel is voor alle paren natuurlijke getallen m en n.

Opgave 14. *Vind alle functies* $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *zo dat*

$$f(f(f(x))) + 4f(f(x)) + f(x) = 6x$$

voor alle $x \in (0, \infty)$.

Opgave 15. *Zij* $n \geq 1$ *een geheel getal. In dorp* X *wonen* n *meisjes en* n *jongens; elk meisje hier kent elke jongen. In dorp* Y *wonen* n *meisjes,* $g_1, g_2, \ldots, g_n$, *en* $2n-1$ *jongens,* $b_1, b_2, \ldots, b_{2n-1}$. *Voor* $i = 1, 2, \ldots, n$ *geldt dat meisje* g_i *jongens* $b_1, b_2, \ldots, b_{2i-1}$ *kent en geen andere jongens. Zij* r *een geheel getal met* $1 \leq r \leq n$. *In elk van de dorpen wordt een feest gehouden waarbij* r *meisjes uit het betreffende dorp en* r *jongens uit hetzelfde dorp geacht worden met elkaar te dansen in* r *dansparen. Echter, elk meisje wil alleen dansen met een jongen die ze kent. Noem* $X(r)$ *het aantal manieren waarop we* r *dansparen kunnen kiezen in dorp* X; *noem* $Y(r)$ *het aantal manieren waarop we* r *dansparen kunnen kiezen in dorp* Y.
Bewijs dat $X(r) = Y(r)$ *voor* $r = 1, 2, \ldots, n$.

Opgave 16. *Wat is de honderste decimaal achter de komma van*

$$(1 + \sqrt{2})^{2010}?$$

Opgave 17. *Gegeven zijn* $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ *en voor* $n \geq 4$ *definieren we*

$$a_n = \frac{1 + a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-3}}.$$

Bewijs dat a_n *geheel is voor alle natuurlijke* n.

Opgave 18. *Zij* $k > 1$ *een natuurlijk getal en definieer* $m = 4k^2 - 5$. *Bewijs dat er gehele* $a, b > 0$ *zijn, zodat in de rij gegeven door* $F_0 = a$, $F_1 = b$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ *alleen termen voorkomen die copriem zijn met* m.

Opgave 19. *Bekijk de rij* $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *gedefinieerd door*

$$x_i = \begin{cases} 2^i, & \text{als } 0 \leq i \leq 2014 \\ \sum_{j=1}^{2015} x_{i-j}, & \text{als } i \geq 2015. \end{cases}$$

Vind de maximale k, *zo dat er* k *opeenvolgende getallen in deze rij zijn die deelbaar zijn door* 2015.

Opgave 20. *Zij* $(x_n)n \geq 0$ *een rij van reële getallen ongelijk aan nul, zo dat* $x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1} = 1$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$. *Bewijs dat er een reëel getal* a *bestaat zo dat* $x_{n+1} = ax_n - x_{n-1}$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$.