

Opgaven week 3: Ladeprincipe

Opgave 1 Gegeven zijn 19 verschillende getallen in de verzameling $\{1, 4, 7, \dots, 100\}$. Bewijs dat er twee verschillende van die getallen bestaan met som 104.

Opgave 2 Op een feest zijn meerdere mensen. Bewijs dat er twee mensen zijn die evenveel personen op het feest kennen.

Opgave 3 Een groep van n mensen zit in een restaurant aan een ronde tafel. Iedereen heeft een ander gerecht besteld, maar als het eten eenmaal wordt uitgeserveerd blijkt dat niemand het juiste bord heeft gekregen. Bewijs dat de tafel zo gedraaid kan worden dat in ieder geval twee mensen het juiste bord voor hun neus hebben.

Opgave 4 Een collectie deelverzamelingen uit $\{1, 2, \dots, n\}$ heeft de eigenschap dat ieder tweetal een niet-lege doorsnede heeft. Bewijs dat de collectie uit maximaal 2^{n-1} deelverzamelingen bestaat.

Opgave 5 Zij n een positief geheel getal. Bewijs dat er een getal van de vorm

$$11 \dots 1100 \dots 00$$

bestaat dat deelbaar is door n .

Opgave 6 Gegeven zijn n gehele getallen. Bewijs dat er een niet-lege deelverzameling van deze getallen bestaat, waarvan de som deelbaar is door n .

Opgave 7 Gegeven zijn $n + 1$ gehele getallen tussen 1 en $2n$. Bewijs dat er voor twee van deze getallen geldt dat de ene de ander deelt.

Opgave 8 Bekijk de rij van Fibonacci F_n . Bewijs dat er een n bestaat zo dat F_n eindigt op 2015 nullen.

Opgave 9 Zij $P(S)$ de verzameling van deelverzameling van S met precies 2 elementen. De elementen van $P(\mathbb{N})$ worden of rood of blauw gekleurd. Bewijs dat er een oneindige deelverzameling $V \subseteq \mathbb{N}$ bestaat zo dat alle elementen van $P(V) \subseteq P(\mathbb{N})$ dezelfde kleur hebben.

Opgave 10 Een schaker bereidt zich in de komende 77 dagen voor op een toernooi. Dat doet hij door iedere dag minstens een partij te spelen, maar in de gehele voorbereiding niet meer dan 132 partijen. Bewijs dat er een aantal opeenvolgende dagen is, waarop de schaker precies 21 partijen speelt.

Opgave 11 Is het mogelijk om het standaard 8×8 -schaakbord te snijden met 13 lijnen (niet door het midden van één van de vakjes), zo dat de middens van de 64 hokjes in aparte gebieden liggen?