Opgaven week 5: Getaltheorie I

Opgave 1 *Zij* $N = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97$. *Wat is de rest van* N *bij deling door* 96*? En bij deling door* 101*?*
Hint: Je hoeft het product niet uit te rekenen.

Opgave 2 *Bewijs dat de breuk*

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

voor geen enkel geheel getal n *te vereenvoudigen is.*

Opgave 3 *a) Wat is de rest van* 2015^{2015} *bij deling door* 2016*?*

b) Wat is de rest van 1234568^{2015} *bij deling door* 3*?*

c) Wat is het laatste cijfer van 3^{2015}*?*

d) Bewijs dat er geen macht van 2 *is waarvan de decimale schrijfwijze eindigt op* 2012.

Opgave 4 *Bewijs dat een getal deelbaar is door* 9 *precies als de som van de cijfers deelbaar is door* 9.
Bewijs ook dat een getal deelbaar is door 11 *precies als de alternerende som van de cijfers deelbaar is door* 11.

Opgave 5 *Bewijs dat*

$$\frac{\gcd(m,n)}{n}\binom{n}{m}$$

geheel is voor alle $n \geq m \geq 1$.

Opgave 6 *Definieer* $n = 9^{753}$. *Bepaal* $\mathrm{ggd}(n^2+2, n^3+1)$.

Opgave 7 *Bewijs dat er niet een paar* $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ *bestaat zodanig dat*

$$x^4 + y^3 = 2613527.$$

Opgave 8 *Gegeven zijn drie natuurlijke getallen* r, s *en* t *die paarsgewijs onderling ondeelbaar zijn. Als* a *en* b *elementen zijn van een commutatieve groep met eenheidselement* e *en* $a^r = b^s = (ab)^t = e$, *bewijs dan dat* $a = b = e$.
Geldt dit ook voor een niet-commutatieve groep?

Opgave 9 *Laten* u *en* v *twee onderling ondeelbare positieve gehele getallen zijn. Bewijs dat er gehele getallen* a *en* b *groter dan* 1 *zijn, en positieve gehele getallen* n *en* m, *zodanig dat geldt*

$$a^{n^u} = b^{m^v} \quad \text{en} \quad a^u = b^v.$$

Opgave 10 *De rij* $f_0, f_1, \ldots$ *Fibonaccigetallen is gedefiniëerd door* $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{i+2} = f_i + f_{i+1}$ *voor* $i \geq 0$. *De rij* F_0, F_1, $\ldots$ *Fermatgetallen is gedefiniëerd door* $F_m = 2^{2^m} + 1$. *Bepaal alle paren niet-negatieve gehele getallen* n, m *met* $f_n = F_m$.