Opgaven week 7: Polynomen

Opgave 1 *Zij n een even positief geheel getal. Het polynoom $p \in \mathbb{R}[X]$ heeft graad n en voldoet voor alle gehele $1 \leq k \leq n$ aan $p(-k) = p(k)$. Bewijs dat er een polynoom q met reële coëfficiënten bestaat zo dat*

$$p(x) = q(x^2).$$

Opgave 2 *a) Bestaat er een polynoom P met reële coëfficiënten zo dat*

$$P\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{k+2}{k}$$

voor alle natuurlijke k?

b) Bestaat er een polynoom Q met reële coëfficiënten zo dat

$$Q\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k+1}$$

voor alle natuurlijke k?

Opgave 3 *a) Laat zien dat*

$$ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

zonder haakjes uit te werken.

b) Factoriseer

$$ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2)$$

zonder haakjes uit te werken.

Opgave 4 *Bepaal de determinant van de matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{pmatrix}$$

In het algemeen: gegeven n getallen x_i met $0 \leq i \leq n-1$. Wat is de determinant van de matrix gegeven door

$$M_{i,j} = x_i^j \quad \text{voor} \quad 0 \leq i, j \leq n-1.$$

Opgave 5 *Bepaal de determinant van de matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 & w^4 \end{pmatrix}$$

Opgave 6 *Gegeven zijn verschillende gehele getallen a_1 tot en met a_n met $n > 1$. Bewijs dat het polynoom*

$$(x-a_1)\dots(x-a_n) - 1$$

irreducibel is over $\mathbb{Z}$.

Opgave 7 *Laat A en B reële $n \times n$-matrices zijn. Neem aan dat er $n+1$ verschillende reële getallen $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$ bestaan zo dat de matrices*

$$A + t_i B$$

alle $n+1$ nilpotent zijn. Bewijs dat A en B nilpotent zijn.

Opgave 8 *Een polynoom $P \in \mathbb{R}[X]$ van graad n voldoet aan*

$$P(k) = \frac{k}{k+1}$$

voor alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Bepaal alle mogelijke waarden van $P(n+1)$.

Opgave 9 *Vind alle natuurlijke getallen n waarvoor een polynoom $P \in \mathbb{Z}[X]$ bestaat zo dat voor alle positieve delers $d \mid n$ geldt dat*

$$p(d) = \left(\frac{n}{d}\right)^2.$$

Opgave 10 *Laat A en B twee $n \times n$-matrices zijn met gehele elementen zo dat alle matrices*

$$A, A+B, A+2B, \ldots, A+2nB$$

inverteerbaar zijn en hun inverses gehele getallen als elementen hebben. Laat zien dat $A+(2n+1)B$ ook inverteerbaar is en dat de inverse ook alleen maar gehele elementen heeft.

Opgave 11 *Gegeven zijn $2n$ verschillende getallen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Bekijk een $n \times n$-tabel met op plek (i, j) het getal $a_i + b_j$. Gegeven is dat het product van de n getallen in een rij onafhankelijk is van de gekozen rij. Bewijs dat het product van de n getallen in een kolom eveneens niet afhangt van de gekozen kolom.*