Week 8: Invariantie en kleuringen

Bij invariantie is het idee om aan de hand van de opgave een ‘grootheid’ te vinden die invariant blijft onder de operaties in de opgave. Om dit te illustreren volgt hier een voorbeeld.

Voorbeeldopgave 1 *In een rij van tien bomen zit in elke boom een spreeuw. Op het moment dat een spreeuw een willekeurig aantal k bomen naar rechts vliegt, vliegt een andere spreeuw k bomen naar links. Kunnen alle spreeuwen uiteindelijk in één boom komen? Wat als er elf bomen zijn?*

Bij deze opgave nummeren we de bomen en de spreeuwen 1 tot en met 10. De positie van de i-de spreeuw noemen we c_i. Als er een spreeuw k bomen naar rechts en een andere spreeuw k bomen naar links vliegt, dan blijft $\sum_{i=1}^{10} c_i$ onveranderd. In de beginsituatie is dit $1 + \ldots + 10 = 55$. Dit is niet deelbaar door 10 en daardoor is het onmogelijk dat alle spreeuwen uiteindelijk in dezelfde boom terechtkomen. Voor 11 bomen doet dit probleem zich niet voor en zien we snel dat er een oplossing is door de spreeuwen van bomen 1 en 11 naar boom 6 te laten vliegen, die van bomen 2 en 10 naar boom 6, enzovoorts. We kunnen dezelfde invariant weer gebruiken om te laten zien dat het niet mogelijk is dat de 11 spreeuwen met z’n allen in een andere boom dan boom 6 terechtkomen.

Voor sommige opgaven is het zinvol om juist een (non-)invariant te vinden die telkens op dezelfde manier verandert, zoals bijvoorbeeld een steeds wisselende pariteit. Soms is het ook handig om gebruik te maken van zogenaamde half-invarianten. Dit zijn ‘grootheden’ die niet per se gelijk blijven, maar alleen kunnen stijgen of dalen. De variaties zijn eindeloos.

Een ander nuttig thema is: kleuringen. Dit zal worden geïllustreerd aan de hand van het volgende voorbeeld.

Voorbeeldopgave 2 *Beschouw een schaakbord waar de linkerbovenhoek en de rechteronderhoek van afgezaagd zijn. Laat zien dat het onmogelijk is het schaakbord met 31 dominostenen te bedekken.*

De oplossing vind je hier door op te merken dat een dominosteen altijd één wit en één zwart vakje bedekt. Het afgezaagde schaakbord heeft 30 witte en 32 zwarte vakjes. Daarom is het onmogelijk het te bedekken met 31 dominostenen.

Opgaven

Opgave 1 *De getallen 1 tot en met 2015 staan in een rij. In een stap mag je twee getallen die naast elkaar staan, omwisselen. Is het mogelijk dat na 2015 stappen de getallen weer precies staan zoals in het begin?*

Opgave 2 *Gegeven is een drietal getallen. Nu mag je er steeds twee uitkiezen, zeg a en b, en deze vervangen door $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ en $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Kun je het drietal $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ in een aantal stappen vervangen door het drietal $(2, 2, \sqrt{2})$?*

Opgave 3 *In de landen Dillia en Dallia is de valuta respectievelijk dillers en dallers. In Dillia is de wisselkoers 10 dillers voor 1 daller. In Dallia is de wisselkoers 10 dallers voor 1 diller. Een handelaar begint met 1 diller en mag vrij reizen tussen de landen en geeft geen geld uit.*

(a) *Laat zien dat de handelaar op geen enkel moment precies 35 eenheden geld (dat is, dillars of dallers) heeft.*

(b) *Laat zien dat als de handelaar geen geld uitgeeft, hij nooit evenveel dillers als dallers kan krijgen.*

Opgave 4 *Van een 2015×2015-bord is het vakje linksboven afgehakt. Kun je de overige vakjes bedekken met net zoveel horizontale als verticale dominostenen (dus net zoveel stenen van 2 breed en 1 hoog als stenen van 1 breed en 2 hoog)?*

Opgave 5 *Op een willekeurig groot schaakbord bekijken we een gegeneraliseerd paard dat p stappen in een richting en q stappen in de andere richting springt met $p, q > 0$. Bewijs dat zo'n paard alleen na een even aantal stappen kan terugkeren naar z'n oorspronkelijke vakje.*

Opgave 6 *Op elk vakje van een 9×9-bord zit een kever. Als er een fluitsignaal klinkt, kruipt elke kever naar een diagonaal aangrenzend vakje. Hierdoor kunnen sommige vakjes leeg worden (en in andere vakjes zitten meerdere kevers). Wat is het minimale aantal lege vakjes?*

Opgave 7 *Van een $n \times n$-bord is een aantal vakjes ziek. Deze ziekte is erg besmettelijk. Als een vakje minstens twee zijden gemeen heeft met zieke vakjes, dan wordt dat vakje zelf ook ziek. Aan het eind van de epidemie blijkt elk vakje van het bord ziek te zijn. Hoeveel vakjes waren er aan het begin minstens ziek?*

Opgave 8 *Bekijk een rooster in het vlak met een pion op de oorsprong. We spelen een spel waarin in elke stap een pion verwijderd wordt en twee nieuwe pionen geplaatst worden op lege kruispunten die horizontaal of verticaal naast het oude kruispunt liggen. Bewijs dat er altijd een pion op afstand hooguit 5 van de oorsprong staat.*

Opgave 9 *We beginnen met een viertal positieve gehele getallen en voeren het volgende algoritme uit. Als de getallen x, y, u en v zijn en $x > y$ dan vervangen we het viertal door $x - y, y, u + v$ en v. In het geval dat $x < y$ dan vervangen we het door $x, y - x, u$ en $u + v$. We herhalen deze stap telkens. Het algoritme stopt als $x = y$, dat in dat geval is $x = y$ gelijk is aan de grootste gemene deler van de oorspronkelijke x en y. Stel dat het oorspronkelijke viertal m, n, m, n was, bewijs dat het gemiddelde van u en v in de eindsituatie gelijk is aan het kleinste gemene veelvoud van m en n.*

Opgave 10 *Gegeven is een $m \times n$-bord met op elk vakje een munt. In het begin liggen alle munten met kop boven. Bij elke stap kies je een munt met kop boven. Neem deze munt van het bord en draai al zijn buren om. Twee munten zijn buren als de vakjes waar ze op liggen met een zijde aan elkaar grenzen. Voor welke m en n is het mogelijk om alle munten van het bord te halen?*

Opgave 11 *Wat is het maximale aantal niet-overlappende 2×1-dominostenen dat we kunnen plaatsen op het volgende 8×9-schaakbord, gegeven dat er al zes dominostenen geplaatst zijn zoals hieronder aangegeven?*