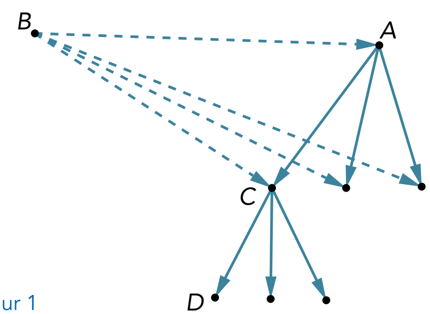
In maart vond de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. De winnaars uit elke categorie, zo'n 130 in totaal, krijgen een uitnodiging voor de finale in september. De komende twee maanden trainen zij op verschillende universiteiten in het land om zich op deze finale voor te bereiden. In vier bijeenkomsten wordt een aantal nuttige bewijstechnieken behandeld. Een daarvan is het *extremenprincipe*.

■ door Julian Lyczak

EEN EXTREEM HANDIG PRINCIPE



Figuur 1

> **Probleem 1.** Bij een toernooi spelen alle deelnemers precies één keer tegen elkaar, zodat er bij iedere wedstrijd altijd een winnaar is. Aan het eind maakt elke deelnemer een lijst met de namen van alle deelnemers die hij heeft verslagen en alle deelnemers die zijn verslagen door iemand die hij verslagen heeft. Bewijs dat er een deelnemer is op wiens lijst alle andere namen voorkomen.

Dit probleem oogt erg lastig: we weten niet eens om wélke speler het gaat. Als we dat wel wisten, dan konden we daarna misschien wel bewijzen dat hij ook daadwerkelijk een volledige lijst heeft. Maar in de vraagstelling heeft iedere speler precies dezelfde rol. Dit geeft dus nog geen idee om welke speler het gaat. We moeten die speler dus op een andere manier vinden.

Bedenk dat de deelnemer met een complete lijst de langste lijst van alle spelers heeft. Ook al weten we nog niet zeker of er wel een speler met een complete lijst is (dit is immers wat we moeten bewijzen), er is natuurlijk zeker een speler met een zo lang mogelijke lijst. Kies daarom zo'n speler; laten we hem Arnold noemen. (Als er meerdere spelers zijn met de langste lijst, kiezen we er gewoon willekeurig eentje uit.) Nu willen we laten zien dat er ook echt geen namen ontbreken op Arnolds lijst.

Als Arnolds lijst volledig is, dan zijn we natuurlijk klaar. Als dat niet zo is, dan ontbreekt er dus in ieder geval één naam, laten we zeggen: Bianca. Dat Bianca niet op de lijst van Arnold staat, betekent twee dingen: Arnold heeft niet van Bianca gewonnen, en de spelers van wie Arnold heeft gewonnen, hebben óók niet van haar gewonnen.

Dus Bianca heeft van Arnold gewonnen en bovendien ook van alle spelers van wie Arnold heeft gewonnen (zie figuur 1). De deelnemers van wie Arnold gewonnen heeft, staan dus in ieder geval ook op haar lijst. Verder staan op Arnolds lijst mensen als, zeg, Dafne, die verloren hebben van iemand van wie Arnold gewonnen heeft, zeg Carel. Maar Bianca heeft ook van Carel gewonnen. Dus is Carel eveneens de verbindende schakel die zorgt dat Dafne op de lijst van Bianca staat, want Bianca heeft gewonnen van Carel en Carel weer van Dafne. Hiermee concluderen we dat alle namen die op de lijst van Arnold staan, ook op de lijst van Bianca staan. Maar op de lijst van Bianca staat ook de naam van Arnold. Dus Bianca's lijst is langer dan die van Arnold. En dat terwijl we Arnold hadden gekozen als een speler met de langste lijst. De aanname dat Arnolds lijst niet volledig was, leidt dus tot een tegenspraak. We concluderen dat Arnolds lijst blijkbaar volledig is!

EXTREMENPRINCIPE Het bewijs van probleem 1 berust op die stap in het begin, waar we gingen kijken naar een persoon met een zo lang mogelijke lijst. Dit idee kunnen we vaker gebruiken en heeft daarom een naam: *extremenprincipe*. Dit principe zegt dat het nuttig kan zijn om uit een verzameling objecten het object met de meest extreme eigenschap te gebruiken.

Hierboven kozen we een speler met een zo lang mogelijke lijst: geen gekke keuze, gezien de opgave. Maar het is lang niet altijd duidelijk op welke eigenschap je de objecten wil sorteren. Je had bijvoorbeeld ook best kunnen kijken naar de speler die de meeste wedstrijden heeft gewonnen. Het is van tevoren zeker niet duidelijk dat deze speler een complete lijst zou moeten hebben, maar dat blijkt wel het geval. Uitdaging: probeer dat zelf te laten zien!

We zullen nu kijken naar andere problemen, waarbij het ook niet direct duidelijk is welke eigenschap we zo klein of zo groot mogelijk willen hebben. Bij het volgende probleem is het in eerste instantie niet eens duidelijk dat het extremenprincipe ons überhaupt zou kunnen helpen!

Probleem 2. Gegeven zijn $2n$ punten in het vlak, geen drie hiervan op één lijn. De helft van deze punten zijn boerderijen, de andere helft waterputten. Bewijs dat je iedere boerderij precies aan één waterput kan koppelen, zo dat er geen twee boerderijen aan dezelfde waterput zijn gekoppeld en zodanig dat elke boerderij met de corresponderende put verbonden kan worden door middel van een kaarsrechte weg zonder dat deze wegen elkaar snijden.

Ook al zie je in eerste instantie misschien niet de overeenkomsten met probleem 1, zó anders is dit probleem niet. In probleem 1 zochten we uit een verzameling personen er eentje met de juiste eigenschap. In probleem 2 zoeken we uit alle mogelijke koppelingen de juiste. Nu moeten we alleen nog een eigenschap vinden waarop we willen en kunnen selecteren. Zo'n eigenschap is bijvoorbeeld de totale lengte van alle wegen. We willen boerderijen waarschijnlijk liever niet aan waterputten koppelen die ver weg zijn, want dan zullen er vast wegen gaan kruisen. Dus we bekijken de koppeling met de kleinste totale weglengte.

Stel dat deze koppeling toch niet voldoet. Dat betekent dus dat er boerderijen B_1 en B_2 zijn en waterputten W_1 en W_2, waarbij B_1 aan W_1 is gekoppeld en B_2 aan W_2 zo dat de lijnstukken B_1W_1 en B_2W_2 elkaar snijden in een punt S (zie figuur 2). We gaan nu bewijzen dat de totale weglengte korter wordt als we de koppeling van deze twee boerderijen en waterputten omdraaien, dus dat

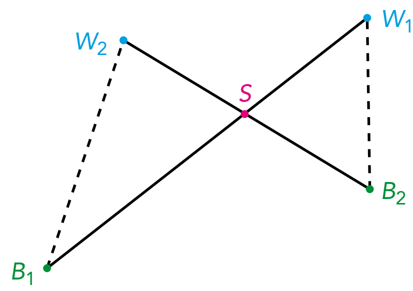
$$|B_1W_1| + |B_2W_2| > |B_1W_2| + |B_2W_1|.$$

De linkerkant kunnen we schrijven als

$$(|B_1S| + |SW_1|) + (|B_2S| + |SW_2|).$$

Na wat geschuif met de termen, krijgen we

$$(|B_1S| + |SW_2|) + (|B_2S| + |SW_1|).$$



Figuur 2

De som van de eerste twee lengtes is de lengte van een niet rechtstreeks pad van B_1 naar W_2 en dat zal dus langer zijn dan $|B_1W_2|$. Zo geldt ook dat

$$|B_2S| + |SW_1| > |B_2W_1|.$$

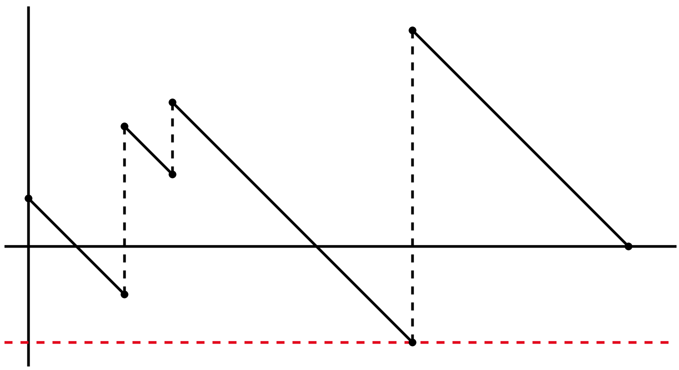
Dus blijkbaar wordt de totale weg korter als we deze koppeling omdraaien. Maar dat is in tegenspraak met onze aanname dat deze koppeling de kleinste totale weglengte had. Blijkbaar voldoet de koppeling toch. Er bestaat dus inderdaad zo'n koppeling.

CIRKELVORMIG PARCOURS Een ander probleem met een verrassende toepassing van het extremenprincipe is het volgende:

Probleem 3. Er staan n identieke auto's op een cirkelvormig parcours. Samen hebben ze precies genoeg benzine om één auto een ronde te laten rijden. Bewijs dat er een auto is die een volledige ronde kan rijden, als deze onderweg mag bijtanken van de andere auto's.

Laten we eerst eens gaan kijken wat er precies gebeurt als we een van de auto's zouden laten gaan rijden. Uiteraard kan het zijn dat op een gegeven moment de tank leeg is en dat de auto stilvalt. Om dit te voorkomen, doen we gewoon even alsof de auto ook een negatieve hoeveelheid brandstof kan hebben en eigenlijk altijd kan doorrijden (daar doen wij wiskundigen niet moeilijk over). Het brandstofniveau in de tank ziet er dan als volgt uit (zie figuur 3): het zal dalen totdat de auto een volgende auto tegenkomt en dan zal het omhoogschieten. En als de auto weer bij zijn beginpositie is, zal hij nog precies '0 benzine' hebben, want er was in totaal precies genoeg benzine voor één ronde. Als de hoeveelheid nergens negatief wordt, dan hadden we toevallig de juiste auto gekozen en voldoet deze aan de voorwaarde in de opgave. Zo niet, dan zal er een punt zijn waarop deze auto een minimum aan brandstof heeft. Dit gebeurt dus vlak voordat er weer benzine bijkomt en dus op het moment dat de auto langs een andere auto kwam. Het is nu niet meer moeilijk om na te gaan dat deze andere auto de hele ronde kan rijden zonder stil te komen staan.

Meer onderwerpen die aan bod komen bij de finaletraining kun je vinden op de website van de Nederlandse Wiskunde Olympiade: www.wiskundeolympiade.nl/ft. ■



Figuur 3