Op weg naar IMO2011

IMO2006 - OPGAVE 4

[Julian Lyczak]

Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zitten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken treft u in de komende nummers van Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.

Begin juli 2006 stonden vijf anderen en ik klaar op Utrecht Centraal om met de trein af te reizen naar Ljubljana, de hoofdstad van Slovenië, waar wij Nederland zouden vertegenwoordigen tijdens de Internationale Wiskunde Olympiade. Ongeveer een maand eerder waren wij als besten uit de bus gekomen na een spannende eindtoets die volgde op een jaar lang hard trainen. We hadden al veel gehoord over vorige IMO's en ik keek dan ook echt uit naar het ontmoeten van al die leeftijdsgenoten met dezelfde interesse uit al die verschillende landen en culturen, alle leuke, spontane en onverwachte dingen die we zouden meemaken en natuurlijk de twee toetsdagen met ieder drie opgaven. En zo vertrokken we met onze verwachtingen en begeleider naar Slovenië. Hoewel alleen al het meemaken van een IMO een heel bijzondere ervaring is en ik alleen al daarover een artikel vol zou kunnen schrijven, wil ik toch in dit artikel mij meer op het wiskundige aspect richten en de eerste opgave van de tweede dag behandelen.

De opgave

Bepaal alle paren gehele getallen (x, y) zodanig dat:

(1)… $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$

Uit de opgave kunnen we gelijk wat kleine dingetjes concluderen:

- Als (x, y) een oplossing is, dan is $(x, -y)$ er ook één.
- Bij iedere x bestaat maximaal één niet-negatieve y.
- Als x kleiner is dan -1, is de linkerkant niet geheel, want dan zijn beide tweemachten kleiner dan $\frac{1}{2}$ en zit de linkeruitdrukking strikt tussen 1 en 2.

Om nog meer gevoel voor de opgave te krijgen en natuurlijk om in ieder geval sommige oplossingen te vinden, gaan we kleine waarden uitproberen. Door de observatie die we hierboven al deden, blijkt het handiger om kleine x in te vullen en te kijken of er dan een y bestaat, dan andersom. De resultaten staan ***in tabel 1***.

x	$1 + 2^x + 2^{2x+1}$	y
-1	2	-
0	4	±2
1	11	-
2	37	-
3	137	-
4	529	±23
5	2081	-
6	8257	-
7	32897	-
8	131329	???

tabel 1

We hebben in ieder geval al vier oplossingen gevonden. We zouden de tabel voor nog wat meer kleine x kunnen berekenen, maar aangezien $1 + 2^x + 2^{2x+1}$ steeds sneller stijgt, wordt het een heel stuk lastiger om te bepalen of we dan een kwadraat krijgen. Voor $x = 5$ kan dat nog redelijk eenvoudig: merk op dat $40^2 < 2081 < 50^2$ en dat als 2081 een kwadraat is van een geheel getal, dat getal op een 1 of een 9 moet eindigen. We hoeven dus alleen $41^2 = 1681$ en $49^2 = 2401$ uit te rekenen. En voor $x = 6$ en $x = 7$ is dat nog gemakkelijker, aangezien een kwadraat nooit op een 7 eindigt.

Maar voor $x = 8$, waarbij we een uitkomst krijgen die jammer genoeg niet weer op een 7 eindigt, is dit eigenlijk al niet meer te doen op de manier zoals bij $x = 5$. Daarom is het, in verband met de beschikbare tijd, beter om iets anders te gaan proberen. Zo kunnen we uit de tabel zien dat y altijd oneven moet zijn voor $x \geq 1$, wat we ook direct kunnen bewijzen uit (1).

We zouden er op kunnen speculeren dat voor iedere viervoud x een oplossing bestaat of juist voor ieder kwadraat van een even getal. Of misschien zijn er maar een eindig aantal oplossingen en hebben we ze al bijna allemaal. Voor die eerste twee vermoedens zouden we $x = 4k$ en $x = 4l^2$ kunnen invullen om te kijken of we misschien gelijk kunnen zien of er dan een kwadraat uitkomt. Natuurlijk hopen we op een mooi merkwaardig product, maar helaas lukt dat niet op deze manier. En zelfs al vinden we op deze manier een familie van oplossingen, dan nog hebben we niet bewezen dat dit ook echt *alle* oplossingen zijn. Met de kennis dat er op een IMO hooguit één punt te behalen valt met zo'n resultaat, gaan we toch maar even iets anders verzinnen.

Laten we nu eens de vergelijking gaan herschrijven. Zoals al eerder opgemerkt, zijn merkwaardige producten nooit verkeerd en we kunnen er een verkrijgen door de '1' naar de andere kant te halen en de vergelijking te schrijven als:

(2)… $2^x(2^{x+1} + 1) = y^2 - 1 = (y - 1)(y + 1)$

Dit is heel nuttig, want we hebben links en rechts een ontbinding staan en we weten precies hoeveel factoren 2 er links zitten. Laten we daarom kijken naar oplossingen met $x \geq 1$; we weten toch al hoe het zit voor

$x = 0$ en $x = -1$ (met de twee oplossingen $(0, \pm 2)$, respectievelijk geen oplossingen).
Voor $x \geq 1$ weten we dat y oneven is.
Dus de factoren $y - 1$ en $y + 1$ zijn allebei even. Verder zijn het twee even getallen met verschil twee, dus is er precies eentje ook deelbaar door vier. Dus links moeten minstens drie factoren 2 zitten, dus er moet wel gelden dat $x \geq 3$. (We wisten al uit onze tabel dat $x = 1$ en $x = 2$ inderdaad geen oplossingen leveren.)
Laten we vanaf nu dus aannemen dat $x \geq 3$. Van de factoren rechts is de ene factor precies deelbaar door één factor 2 en de andere factor door de overige $(x - 1)$ factoren 2. Dus we kunnen y schrijven als:
$y = 2^{x-1} \cdot m \pm 1$
met m een positief oneven getal. Als we deze y weer in de vergelijking (2) invullen, krijgen we:

$$\begin{aligned} 2^x(2^{x+1}+1) &= (y-1)(y+1) \\ &= 2^{x-1}m(2^{x-1}m \pm 2) \\ &= 2^{2x-2}m^2 \pm 2^x m \end{aligned}$$

of, na deling door 2^x ($\neq 0$):

(3)… $2^{x+1}+1 = 2^{x-2}m^2 \pm m$

Nu kunnen we laten zien dat als m (en daarmee y) te groot wordt, er geen oplossing voor x kan bestaan. Daartoe gaan we gevallen onderscheiden, aan de hand van het plusminusteken.
In het geval van de 'plus' kan *niet* gelden dat $m^2 > 8$, want dan geldt:

$$2^{x-2}m^2 + m > 8 \cdot 2^{x-2} + 1 = 2^{x+1} + 1$$

Dus $m^2 \leq 8$, en aangezien m ook oneven en positief moet zijn, moet wel gelden dat $m = 1$. Maar $2^{x-2} + 1 = 2^{x+1} + 1$ heeft geen oplossingen voor gehele x.
In het geval van de 'min' is de afschatting wat lastiger, maar deze kan toch op veel manieren. Een snelle manier is de volgende. We schrijven de minvariant van vergelijking (3) om tot:

(4)… $1 + m = 2^{x-2}m^2 - 2^{x+1} = 2^{x-2}(m^2 - 8)$

Aangezien we hadden aangenomen dat $x \geq 3$, en dus $2^{x-2} \geq 2$, krijgen we de afschatting:
$1 + m \geq 2(m^2 - 8)$
wat leidt tot de kwadratische ongelijkheid:
$2m^2 - m - 17 \leq 0$
Dus m moet tussen de nulpunten van de vergelijking $2m^2 - m - 17 = 0$ liggen.

De *abc*-formule levert:

$$\frac{1-\sqrt{137}}{4} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{137}}{4}$$

Het kleinste nulpunt is duidelijk kleiner dan 0 en het tweede kunnen we verder afschatten met $\frac{1+\sqrt{137}}{4} \leq \frac{1+\sqrt{144}}{4} = 3\frac{1}{4}$.
Nu hoeven we alleen nog te kijken of er een x bestaat bij $m = 1$ en bij $m = 3$, zodat aan (3) voldaan is.
Bij $m = 1$ gaat de vergelijking (4) over in een vergelijking zonder gehele oplossingen:
$2 = -7 \cdot 2^{x-2}$
In het geval $m = 3$ krijgen we de vergelijking:
$4 = 2^{x-2}$
waaruit direct $x = 4$ volgt. Zo vinden we de oplossingen $(4, \pm 23)$.
De in de tabel gevonden oplossingen $(0, \pm 2)$ en $(4, \pm 23)$ waren dus *alle* oplossingen.

Hoewel ik op de IMO in 2006 deze oplossingen ook had gevonden, was het me toen niet gelukt om waterdicht te bewijzen dat het *alle* oplossingen waren. Opgave 1 van de eerste dag, een meetkundeopgave, heb ik wel volledig opgelost en dat leverde me een eervolle vermelding op.

Over de auteur
Julian Lyczak is na zijn eerste plaats bij de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2005 en een eervolle vermelding bij de Internationale Wiskunde Olympiade in 2006 wis- en natuurkunde gaan studeren aan de Universiteit van Utrecht. Sinds november 2007 is hij actief als trainer bij de training en selectie van het Nederlandse team voor de IMO. Verder is hij in Utrecht een van de organisatoren van de nieuwe tweede ronde en de aansluitende finaletraining.
E-mailadres: *J.T.Lyczak@students.uu.nl*