Week 0: introductie

Hou je ook zo van wiskundige puzzels en raadsels? Dan ben je bij de wiskundewedstrijdtraining aan het juiste adres! De wiskundewedstrijdtraining is opgezet door promovendi Julian Lyczak en Raymond van Bommel om te trainen voor de diverse wiskundewedstrijden voor studenten die de wereld rijk is, zoals de LIMO (Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade), de MOAWOA (Math Olympiad for All / Wiskunde Olympiade ∀) en de IMC (International Mathematics Competition). Deelnemen aan zulke wedstrijden is natuurlijk fantastisch, maar het is nog leuker als je een beetje voorbereid bent.

De opzet van de wiskundewedstrijdtraining is als volgt. We houden wekelijks een bijeenkomst met een ander thema. De hoofdthema's zijn: combinatoriek, getaltheorie, algebra en analyse. Tijdens elke bijeenkomst geven wij een korte introductie van het onderwerp en geven wij jullie een leuke uitdagende set problemen waar aan gewerkt kan worden. De problemen zijn in oplopende moeilijkheidsgraad om te zorgen dat er voor ieder wat wils is. Het is dus een misverstand om te denken dat je voor de wiskundewedstrijdtraining al heel goed moet zijn in wiskunde of heel veel ervaring moet hebben met de wiskunde-olympiade. Het doel van de training is juist om veel plezier te hebben (en in de tussentijd wel een beetje beter te worden).

Bij de eerste bijeenkomst zullen we een tijdstip in de week kiezen voor de bijeenkomsten. Als je toch mee wilt doen, maar dan niet kan, stuur dan een e-mail naar r.van.bommel@math.leidenuniv.nl en/of j.t.lyczak@math.leidenuniv.nl.

Opgaven

Opgave 1 *Een boekje ontstaat door 2016 blaadjes op elkaar te leggen en het pak daarna door midden te vouwen. De pagina's van het boekje worden nu genummers, zoals in een boek, van 1 tot en met* $4 \cdot 2016$*, waarbij de voorkant van de kaft nummer 1 krijgt en de achterkant van de kaft het nummber 44. Nu wordt het boekje weer uitgevouwen en pakken we een willekeurig blaadje van de 2016 blaadjes. We tellen de vier getallen op dit blaadje op.*
Wat is de grootst mogelijke uitkomst die we kunnen krijgen?

Opgave 2 *Een lid van een groep van tien vrienden neemt een zak snoepjes mee om onderling te verdelen. Hijzelf, die wat meer van snoep houdt dan de rest, neemt een kwart van alle snoepjes. Een andere vriend pakt er 30. Nummer drie neemt 10% van wat er dan nog over is. De overige vrienden verdelen de rest van de snoepjes gelijkelijk onder elkaar. Het aantal snoepjes in de zak was minder dan 500 en iedereen kreeg minstens één snoepje.*
Hoeveel snoepjes zaten er in de zak?

Opgave 3 *Wat is het kleinste getal dat we kunnen verkrijgen door* drie *opeenvolgende positieve even getallen op te tellen, maar ook door* vier *opeenvolgende positieve even getallen op te tellen? (Een getal heet* positief *als het groter is dan* 0*.)*

Opgave 4 *Er is een stuk appeltaart gestolen en vijf kinderen worden hierover ondervraagd. Ze weten allemaal wie het gedaan heeft, maar ze spreken niet allemaal de waarheid. Als een kind liegt, dan voelt het volgende kind zich daar zo schuldig over dat het juist de waarheid spreekt. De kinderen doen de volgende uitspraken in deze volgorde:*

- *Asim: "Coen en ik hebben het allebei niet gedaan."*
- *Bob: "De dader is Coen of Dilan."*
- *Coen: "Eva en ik hebben het allebei niet gedaan."*
- *Dilan: "De dader is Asim."*

- *Eva: "Minstens twee van Asim, Bob, Coen en Dilan hebben gelogen."*

Wie heeft de appeltaart gestolen?

Opgave 5 *Hoeveel getallen van 3 cijfers (het eerste cijfer mag geen* 0 *zijn) zijn er met de eigenschap dat als je alle cijfers bij elkaar optelt de uitkomst groter is dan wanneer je alle cijfers met elkaar vermenigvuldigt?*

Opgave 6 *Ria, Sophie en Tine zitten in deze volgorde met de klok mee om een ronde tafel en spelen een spel met fiches. Ria begint met* 3*, Sophie met* 4 *en Tine met* 5 *fiches. In elke ronde geven ze alle drie tegelijk fiches aan één van hun buren. Elke speler kan kiezen om* 2 *fiches aan haar rechter buurvrouw te geven of juist* 1 *fiche aan haar linker buurvrouw. Als iemand geen fiches meer heeft dan stopt het spel.*
Kunnen de spelers na een aantal rondes allemaal evenveel fiches hebben, en zo ja, hoeveel rondes moeten hiervoor minimaal gespeeld worden?

Opgave 7 *Zes mensen zitten om een ronde tafel. Elk van hen is óf een ridder óf een schurk. Ridders spreken altijd de waarheid, terwijl schurken altijd liegen. Iedereen heeft een kaartje met een getal erop. Alle getallen zijn verschillend en iedereen kent de getallen van zijn/haar twee buren. Je vraagt elk van hen: "Is jouw getal groter dan de getallen van allebei je buren?" Iedereen antwoordt met "Ja". Vervolgens vraag je elk van hen: "Is jouw getal kleiner dan de getallen van allebei je buren?" Nu krijg je zowel antwoorden "Ja" als "Nee" te horen, allebei minstens een keer.*
Wat kan het aantal antwoorden "Ja" zijn op deze laatste vraag?

Opgave 8 *We bekijken invullingen van een* 5×5*-bord waarbij in elk vakje een* 1 *of een* 3 *staat. Zo'n invulling heet* evenwichtig *als het volgende geldt:*

- *Als je een willekeurig* 3×3*-vierkant van het bord neemt en daarvan alle getallen met elkaar vermenigvuldigt, en je doet hetzelfde met een willekeurig* 4×4*-vierkant, dan is de uitkomst bij het* 4×4*-vierkant altijd precies driemaal zo groot als de uitkomst bij het* 3×3*-vierkant.*

In de figuur hieronder zie je een invulling die niet *evenwichtig is. De getallen in het aangegeven* 4×4*-vierkant zijn met elkaar vermenigvuldigd namelijk* negenmaal *zo groot als de getallen in het aangegeven* 3×3*-vierkant met elkaar vermenigvuldigd.*

1	1	3	3	1
3	1	1	1	3
1	3	1	3	1
3	1	1	3	1
1	1	3	1	1

Geef een evenwichtige invulling van het bord met in zoveel mogelijk vakjes een 3*.*