Week 1: Inductie (set 2)

Opgave 1. *Aan een tennistoernooi doen n mensen mee. Ieder tweetal mensen speelt precies een keer tegen elkaar en iedere wedstrijd wordt door precies één van de spelers gewonnen. Bewijs dat we spelers kunnen nummeren van 1 tot en met n zo dat speler k van speler $k+1$ wint voor alle $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.*

Opgave 2. *Bewijs dat je een $2^n \times 2^n$-bord waarvan een hoekvakje is verwijderd kan betegelen met enkel L-trominos (drie eenheidsvierkantje aan elkaar in de vorm van een L).*

Opgave 3. *Zij n een positief geheel getal. Vind alle nulpunten van het polynoom*

$$1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \dots + \frac{X(X+1)\dots(X+n-1)}{n!}.$$

Opgave 4. *Zij n een natuurlijk getal. Bereken de som $\sum \frac{1}{xy}$ over alle paren (x, y) van gehele getallen die voldoen aan $x, y \leq n$ en $x + y > n$.*

Opgave 5. *Zij Δ de $n \times n$-matrix met*

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \textit{als } i > j+1; \\ -1 & \textit{als } i = j+1; \\ x^{j-i} & \textit{als } i = 1; \\ hx^{j-i} & \textit{als } j \geq i > 1. \end{cases}$$

Bereken de determinant van Δ.

Opgave 6. *Zij n een positief geheel getal. Bewijs dat het getal*

$$2^{2^n} - 1$$

minstens n verschillende priemfactoren heeft.

Opgave 7. *Bewijs dat voor alle $n \geq 2$ geldt dat $(1 + x + x^2)^n$ een even coëfficiënt heeft.*

Opgave 8. *Op een feest met $n \geq 4$ mensen blijkt het volgende te gelden: voor alle viertallen mensen op het feest geldt dat er drie zijn die elkaar allemaal kennen of er zijn drie mensen die elkaar niet kennen. Bewijs dat we de feestbeesten over twee zalen kunnen verdelen zo dat in de ene zaal iedereen elkaar kent en iedereen in de andere zaal elkaar niet kent.*

Opgave 9. *Laat $a, b, p_1, \dots, p_n$ reële getallen zijn met $a \neq b$. Definieer $f(x) = (p_1 - x)(p_2 - x)\dots(p_n - x)$. Bewijs dat*

$$\det \begin{pmatrix} p_1 & a & a & \dots & a & a \\ b & p_2 & a & \dots & a & a \\ b & b & p_3 & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & p_{n-1} & a \\ b & b & b & \dots & b & p_n \end{pmatrix} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$

Opgave 10. *Laat n een positief geheel getal en $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ een rijtjes reële getallen zijn. Bewijs dat onder de 2^n mogelijke sommen*

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$$

er minstens $\binom{n+1}{2}$ verschillend zijn.

Opgave 11. *Elk punt van een gegeven eindige graaf kan blauw of rood zijn. In de beginsituatie zijn alle punten rood. In een zet wordt een knoop gekozen en worden al de buren van deze knoop en deze knoop zelf van kleur veranderd. Bewijs dat het mogelijk is om alle knopen blauw te krijgen met een rij van deze zetten.*