Week 11: Lineaire combinaties, forceer de ontbinding (set 1)

Opgave 1 *Van een rechthoekige legpuzzel van m bij n stukjes is bekend dat het aantal randstukjes (inclusief de vier hoekstukjes) precies 8% is van het totaal aantal stukjes.*
Bepaal de mogelijkheden voor het aantal stukjes van de puzzel.

Opgave 2 *Gegeven zijn $a, b \in \mathbb{Z}$ met $\mathrm{ggd}(a, b) = 1$. Volgens de stelling van Bézout bestaan er gehele x_0 en y_0 zo dat $ax_0 + by_0 = 1$. Bewijs dat er voor iedere oplossing in gehele getallen van $ax + by = 1$ er een gehele n bestaat zo dat*

$$x = x_0 + bn \quad \text{en } y = y_0 - an.$$

Opgave 3 *In een toernooi spelen n teams elk een wedstrijd tegen elk ander team. Elke wedstrijd eindigt in winst voor een team en verlies voor het andere team; er is geen gelijkspel mogelijk. Zij w_i het aantal keer dat team i gewonnen heeft en zij ℓ_i het aantal keer dat team i verloren heeft. Bewijs dat $\sum_{i=1}^{n} w_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \ell_i^2$.*

Opgave 4 *Gegeven is een reële α. Vind alle continue functies $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ die voldoen aan*

$$\int_0^1 xf(x)\ dx = \frac{\alpha}{3};$$
$$\int_0^1 f(x)^2\ dx = \frac{\alpha^2}{3}.$$

Opgave 5 *Op een krijtbord staan een aantal getallen. Per stap mag je twee getallen a en b die op het bord staan kiezen en deze getallen vervangen door het getal $ab + a + b$. We voeren stappen uit totdat dat niet meer kan. Als je begint met de getallen $1, 2, 3, \ldots, 10$, wat zijn dan de mogelijkheden voor het laatste getal?*

Opgave 6 *Zij n een natuurlijk getal. Bepaal het aantal paren (a, b) van natuurlijke getallen dat voldoet aan $\frac{ab}{a+b} = n$.*

Opgave 7 *Zijn $I, J \subset \mathbb{R}$ open intervallen van positieve lengte, zodat I niet bevat is in J en andersom. Laat zien dat er een $\lambda \neq 0$ is zodat $x \mapsto e^{\lambda x}$ de intervallen I en J naar intervallen van gelijke lengte stuurt dan en slechts dan als I en J verschillende lengte hebben.*

Opgave 8 *Op een whiteboard staan een aantal getallen. We kunnen steeds twee getallen a en b op het bord vervangen door $2ab - a - b + 1$. We doen dit tot er slechts één getal op het bord over is.*

a) Wat zijn de mogelijkheden voor dat laatste getal als we beginnen met $\frac{49}{1}, \frac{49}{2}, \ldots, \frac{49}{97}$?

b) En wat als we beginnen met $\frac{1}{2016}, \frac{2}{2016}, \ldots, \frac{2015}{2016}$?

Opgave 9 *Bewijs dat er hoogstens één continue functie $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ bestaat zo dat voor alle $x, y \in [0, 1]$ geldt*

$$f(x, y) = 1 + \int_0^x \int_0^y f(u, v)\ dv\ du.$$