Week 11: Lineaire combinaties, forceer de ontbinding (set 2)

Opgave 1 *Gegeven zijn reële* $x_1, \ldots, x_n > -1$ *met* $\sum_{i=1}^n x_i^3 = 0$. *Laat zien dat* $\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{n}{3}$.

Opgave 2 *Bepaal alle gehele getallen* $n \geq 2$ *met de volgende eigenschap: voor alle positieve gehele getallen* a *en* b *met* $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, *geldt* $a \mid b$ *of* $b \mid a$.

Opgave 3 *Zij* A *een vierkante matrix over de complexe getallen. Bewijs dat er hoogstens één manier is om* A *te schrijven als de som van een commuterende diagonale en nilponte matrix.*
NB: uit het bestaan van de Jordan normaalvorm volgt dat iedere matrix daadwerkelijk zo te schrijven valt, maar dat hoef je nu niet te bewijzen.

Opgave 4 *Zij* X *een stochast met als uitkomst een niet-negatieve geheel getal, zo dat voldaan wordt aan* $E[X] = 1$, $E[X^2] = 2$ *en* $E[X^3] = 5$. *Bepaal de kleinst mogelijk kans op de situatie* $X = 0$.

Opgave 5 *Bewijs dat*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{1 + x^{2k+2}}{(1 - x^{2k+2})^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(1 - x^{k+1})^2}$$

voor alle $x \in (-1, 1)$.

Opgave 6 *Laat* A *en* B *reële* $n \times n$*-matrices zijn die voldoen aan* $A^2 + B^2 = AB$. *Bewijs dat als* $AB - BA$ *inverteerbaar is dan is* 3 *een deler van* n.

Opgave 7 *Voor een positief geheel getal* n *is* $M(n)$ *gedefinieerd als het grooste gehele getal* m *zodat*

$$\binom{m}{n-1} > \binom{m-1}{n}.$$

Bepaal of de volgende limiet bestaat en indien deze bestaat, reken hem uit:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M(n)}{n}.$$

Opgave 8 *Bekijk continue functies* $f, g : [0,1] \to (0, \infty)$ *en* $K : [0,1]^2 \to (0, \infty)$ *zo dat voor alle* $x \in [0,1]$ *voldaan is aan*

$$f(x) = \int_0^1 K(x,y) g(y) \, dy;$$
$$g(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) \, dy.$$

Bewijs dat $f = g$.

Opgave 9 *Laat zien dat er bijectieve functie* $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *bestaat met*

$$f(3mn + m + n) = 4f(m)f(n) + f(m) + f(n)$$

voor alle m *en* n *in* $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.