Week 6: Kleine gevallen (set 2)

Opgave 1 *Beschouw de rij* $(u_n)_n$ *gedefinieerd door* $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ *en*

$$\det \begin{pmatrix} u_{n+3} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix} = n! \quad \textit{voor} \quad n \geq 0.$$

Bewijs dat u_n *een geheel getal is voor alle* n.

Opgave 2 *Gegeven is een priemgetal* p *zo dat* $p^2 + 2$ *ook een priemgetal is. Bewijs dat* $p^3 + 2$ *ook een priemgetal is.*

Opgave 3 *Voor positieve gehele getallen* n *definieren we* $c(n)$ *door* $c(1) = 1$, $c(2n) = c(n)$ *en* $c(2n+1) = (-1)^n c(n)$. *Vind de waarde van*

$$\sum_{n=1}^{2013} c(n)c(n+2).$$

Opgave 4 *Bewijs dat elk niet-negatief geheel getal uniek te schrijven is als*

$$\binom{x+y+1}{2} + x,$$

waarbij x *en* y *niet-negatieve gehele getallen zijn.*

Opgave 5 *Een rij reële getallen* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *voldoet aan* $a_{n-1} + a_{n+1} \geq 2a_n$ *voor* $n \in \{2, 3, \ldots\}$. *Zij* A_k *het gemiddelde van de eerste* k *getallen in deze rij. Bewijs dat*

$$A_{n-1} + A_{n+1} \geq 2A_n$$

voor alle $n \in \{2, 3, \ldots\}$.

Opgave 6 *Bestaan er verschillende rationale getallen* x, y *en* z *zo dat*

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} = 2015?$$

Opgave 7 *Zij* $F(0) = 0$, $F(1) = \frac{3}{2}$ *en* $F(n) = \frac{5}{2}F(n-1) - F(n-2)$ *voor* $n \geq 2$. *Bepaal of*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F(2^n)}$$

rationaal is.

Opgave 8 *Voor elk geheel getal* $n \geq 0$ *definiëren we* $x_n = 2^n - n$. *Vind alle gehele* $m \geq 0$ *zodat*

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_m$$

een tweemacht is.

Opgave 9 *Stel dat* x *en* y *reëele getallen zijn, zodat* $x^2 + xy + y^2 = 0$ *en* $x + y \neq 0$. *Bepaal*

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2017} + \left(\frac{y}{x+y}\right)^{2017}.$$

Opgave 10 *Zij* $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ *en* $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ *voor* $n \geq 2$. *Bepaal of*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F(2^n)}$$

rationaal is.

Moeilijkere problemen om in je vast te bijten

Opgave 11 *Laat* m *en* n *positieve gehele getallen zijn met* $m > 1$*. Anastasia deelt de getallen* $1, 2, \ldots, 2m$ *op in* m *paren. Daarna kiest Boris één getal van elk paar en berekent de som van deze gekozen getallen. Bewijs dat Anastasia de paren zo kan maken dat Boris niet op een som gelijk aan* n *kan uitkomen.*

Opgave 12 *Bewijs voor elk paar positieve gehele getallen* k *en* n *dat er* k *(niet noodzakelijk verschillende) positieve gehele getallen* $m_1, m_2, \ldots, m_k$ *bestaan zodanig dat*

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Opgave 13 *Zij* $n \geq 3$ *een geheel getal. Beschouw een cirkel met daarop* $n + 1$ *punten die op onderling gelijke afstand liggen. Beschouw alle manieren om deze punten met de getallen* $0, 1, \ldots, n$ *te labelen zodanig dat elk getal precies één keer wordt gebruikt; twee zulke manieren worden als gelijk beschouwd als je de ene uit de andere kan verkrijgen door draaiing van de cirkel. We noemen een manier om de punten te labelen mooi als voor elk viertal labels* $a < b < c < d$ *met* $a + d = b + c$*, de koorde tussen* a *en* d *geen snijpunt heeft met de koorde tussen* b *en* c*.*
Zij M *het aantal mooie manieren om de punten te labelen, en zij* N *het aantal geordende paren* (x, y) *van (strikt) positieve gehele getallen zodanig dat* $x + y \leq n$ *en* $\mathrm{ggd}(x, y) = 1$*.*
Bewijs dat $M = N + 1$*.*