Week 4: Ongelijkheden (set 2)

Herschikking weglaten?

Deze week gaat over ongelijkheden. We bewijzen ongelijkheden door te kijken naar de afgeleide en naar de ongelijkheid van Jensen.

Afgeleide

Een manier om ongelijkheden te bewijzen is door naar de afgeleide te kijken.

Stelling 1 (Ongelijkheid met de afgeleide)**.** *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie die continu differentieerbaar is op het inwendige (a, b). Neem aan dat $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in (a, b)$. Dan geldt $f(b) \geq f(a)$ met gelijkheid dan en slechts dan als de afgeleide identiek 0 is.*

Hier volgt een voorbeeld.

Voorbeeldopgave 1. *Zij $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Laat zien dat $e^x > x + 1$.*

Bewijs. We zien dat in $x = 0$ gelijkheid geldt. Beschouw nu de afgeleide van $f(x) = e^x - x - 1$. Die is $f'(x) = e^x - 1$. Het is direct duidelijk dat $f'(x) > 0$ voor alle $x > 0$. Hieruit volgt samen met $f(x) = 0$ dat $f(x) > 0$ voor alle $x > 0$. □

Jensen

De laatste ongelijkeheid die we deze week behandelen is Jensens ongelijkheid.

Stelling 2 (Jensen)**.** *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie die op het inwendige (a, b) twee keer differentieerbaar is. Neem aan dat $f''(x) \geq 0$ voor alle $x \in (a, b)$. Zijn $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ willekeurig gegeven zijn zijn $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ zodat $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Dan geldt*

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

Hier volgt een voorbeeld.

Voorbeeldopgave 2 (Generaliseerd gemiddelde)**.** *Zijn $x_1, \ldots, x_n$ positief en zijn $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in (0, 1)$ met $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. De geldt*

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Bewijs. Pas Jensen toe op de functie $f(x) = -\log x$. □

Opgaven

Opgave 1 (PAB 405)**.** *Vind alle positieve reële oplossingen van de vergelijking $2^x = x^2$.*

Opgave 2 (PAB 439)**.** *Zijn A, B, C de hoeken van een driehoek. Laat zien dat*

$$\sin A + \sin B + \sin C \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Opgave 3 (Larson 7.4.10)**.** *Bewijs dat voor $0 < a < 1$ geldt dat*

$$(1 + x)^a \leq 1 + ax$$

voor alle $x \geq -1$. Hoe is de ongelijkheid als $a < 0$ of als $a > 1$?

Opgave 4 (PAB 407)**.** *Bepaal*

$$\max_{z \in \mathbb{C}, |z|=1} |z^3 - z + 2|.$$

Opgave 5 (PAB 441). *Zijn a_1, a_2, a_3 positief reëel. Laat zien dat*

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3} \geq \frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_1^4 + a_2^4 + a_3^4}.$$

Opgave 6 (Larson 7.4.3). *Zijn a, b en p reëel zodanig dat $0 \leq p \leq 1$. Laat zien dat*

$$|a + b|^p \leq |a|^p + |b|^p.$$

Opgave 7 (Larson 7.4.9). *Zij $0 < x_i < \pi$ voor $i = 1, \ldots, n$ en zij $x = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$. Laat zien dat*

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\sin x_i}{x_i} \right) \leq \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n.$$

Opgave 8 (PAB 410). *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie. Voor $x \in \mathbb{R}$ definiëren we*

$$f(x) = f(x) \int_0^x f(t)dt.$$

Neem aan dat g een niet-dalende functie is. Laat zien dat f de nulfunctie is.

Opgave 9 (PAB 443). *Zijn $n > 1$ en $x_1, \ldots, x_n > 0$ zodat $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Bewijs dat*

$$\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_n}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \ldots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n - 1}}.$$

Opgave 10 (Larson 7.4.23). *Zijn a, b, c de zijdes van een driehoek. Laat zien dat*

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \leq 2.$$