Week 15: Polynomen van matrices (Set II)

- Een vector $v \neq 0$ en een getal λ zijn respectievelijk een eigenvector en een eigenwaarde van een vierkante matrix A als geldt dat $Av = \lambda v$.
- Eigenwaarden zijn precies de nulpunten van het karakteristieke polynoom p_A.
- Er kunnen meerdere eigenvectoren bij een eigenwaarde zijn, maar het maximale aantal lineair onafhankelijke is hoogstens de multipliciteit van de eigenwaarde als nulpunt van p_A.
- De stelling van Cayley-Hamilton zegt dat het karakteristieke polynoom p_A van een matrix A voldoet aan $p_A(A) = 0$.
- Alle polynomen P met $P(A)$ vormen een ideaal I en aangezien $\mathbb{C}[X]$ een hoofdideaaldomein is, bestaat er een uniek monisch polynoom m_A met $I = (m_A)$. Dit is het minimumpolynoom.
- Als de elementen van je matrix A leven in een lichaam $k \subseteq \mathbb{C}$, dan geldt $m_A \in k[X]$.
- Het polynoom m_A deelt het karakteristieke polynoom p_A. Bovendien is ieder nulpunt van p_A, dus elke eigenwaarde, ook een nulpunt van m_A.
- Vind een polynoom waar je matrix een 'nulpunt' van is. Daaruit volgen alle eigenwaarden! Kan je dat niet meteen, ga dan gewoon machten uitdrukken in dingen die je al weet.
- Een $n \times n$-matrix is diagonaliseerbaar dan en slechts dan als er n lineair onafhankelijke eigenvectoren zijn.
- Er zijn n lineair onafhankelijke eigenvectoren voor een $n \times n$-matrix als er voor alle eigenwaarden met multiplictiteit k er k lineair onafhankelijke eigenvectoren zijn.
- Een matrix is diagonaliseerbaar precies als het minimumpolynoom splitst in verschillende lineaire factoren en dus geen dubbele nulpunten heeft.

Opgaven

Opgave 1 *Bewijs dat de volgende uitspraken over een vierkante $n \times n$-matrix A equivalent zijn:*

(i) er bestaat een k met $A^k = 0$;

(ii) $A^n = 0$;

(iii) alle eigenwaarden van A zijn nul.

We zeggen in dit geval dat A nilpotent is.

Opgave 2 *Zij A een reële 2×2-matix die voldoet aan $A^5 = I$. Wat zijn de mogelijke combinaties van $\det A$ en $\operatorname{Sp} A$?*

Opgave 3 *Zij A een 3×3-matrix met $p_A(t) = t^3 + at + b$. Druk p_{A^2} uit in a en b.*

Opgave 4 *Zij A een $n \times n$-matrix met $A^2 = I$. Bewijs dat $\operatorname{Rg}(A + I) + \operatorname{Rg}(A - I) = n$.*

Opgave 5 *Beschouw een reële 2×2-matrix A met niet-negatieve determinant. Laat zien dat*

$$\det(A^n + I_2) + \det(A^n - I_2) \geq \frac{1}{2^{n-2}} \left(\det(A) + 1\right)^n .$$

Opgave 6 *Een vierkante matrix X is gedefinieerd door $X_{12} = X_{23} = X_{31} = 1$ en op de overige plekken alleen maar nullen. Definieer $Y = aI + bX + cX^2$. Bewijs dat $Y^{2004} = 0$ impliceert dat $Y = 0$.*

Opgave 7 *Laat zien dat als voor een* 3×3*-matrix* A *met elementen in* $\mathbb{Q}$ *geldt dat* $A^8 = I_3$*, dan geldt ook* $A^4 = I_2$*.*

Opgave 8 *Bestaat er een reële* 3×3*-matrix* A *zo dat* $\operatorname{Sp} A = 0$ *en* $A^2 + A^t = I$*?*

Opgave 9 *Zij* A *een* 2×2*-matrix met gehele elementen zo dat er een gehele* $n \geq 1$ *bestaat met* $\operatorname{ggd}(n, 6) = 1$ *en* $A^n = I_2$*. Laat zien dat* $A = I_2$*.*

Opgave 10 *Laat* A *en* B *twee* 2×2*-matrices zijn, beiden met determinant gelijk aan* 1*. Bewijs dat*

$$\operatorname{Sp}(AB) + \operatorname{Sp}(AB^{-1}) = \operatorname{Sp} A \operatorname{Sp} B.$$

Opgave 11 *Zij* A *een* $n \times n$*-matrix met gehele elementen. Stel dat*

$$p^2 A^{p^2} = q^2 A^{q^2} + r^2 I_n$$

waar I_n *de* $n \times n$*-identiteitsmatrix is en* p*,* q *en* r *natuurlijke getallen met* r *oneven en* $p^2 = q^2 + r^2$*. Bewijs dat* $|\det A| = 1$*.*

Opgave 12 *Zij* A *een reële* $n \times n$*-matrix. Voor ieder natuurlijk getal* k *definiëren we* $A^{[k]}$ *als de matrix verkregen door ieder element van* A *tot de macht* k *te verheffen. Bewijs dat als* $A^k = A^{[k]}$ *voor* $k = 1, 2, \ldots, n+1$ *dat dan* $A^k = A^{[k]}$ *geldt voor alle* $k \geq 1$*.*