Week 16: Het nut van differentiëren (set II)

Op de meest onverwachte momenten kan het opeens handig blijken om een afgeleide te nemen. Het grootste probleem is vervolgens om de afgeleide juist te bepalen. Hier zijn twee belangrijke regels bij het differentiëren:

Lemma 1 *Een uitdrukking $f(x)$ met daarin op meerdere plekken de variable x, kunnen we differentiëren naar x door te differentiëren naar iedere afzonderlijke x (en daarbij dus doen alsof de rest constanten zijn) en de resultaten op te tellen.*

In formules: zij $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie die voldoet aan $f(x) = g(x, x, \ldots, x)$ dan geldt

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x, x, \ldots, x) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(x, x, \ldots, x) + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x, x, \ldots, x).$$

We kunnen dus bijvoorbeeld $x^{\sin x} + (\sin x)^{e^x}$ differentiëren naar x door te schrijven

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^{\sin x_2} + (\sin x_3)^{e^{x_4}}$$

en deze functie af te leiden naar alle vier de variabelen, weer x in te vullen voor de x_i en deze resultaten op te tellen.
Soms kan je wat slimmer zijn en bijvoorbeeld kijken naar

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1^{x_2} + x_2^{x_3}$$

en dan de afgeleiden van $h(x, \sin x, e^x)$ bepalen:

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x, \sin x, e^x) + \frac{\partial h}{\partial x_2}(x, \sin x, e^x) \cdot \cos x + \frac{\partial h}{\partial x_3}(x, \sin x, e^x) \cdot e^x.$$

We kunnen dit gebruiken om de afgeleide van $f(x) = x^n$ te bepalen. Definieer $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$, dan vinden

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{\partial g}{\partial x_1}(x, x, \ldots, x) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(x, x, \ldots, x) + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_n} g(x, x, \ldots, x)\\ &= [x_2 x_3 \ldots x_n + x_1 x_3 \ldots x_n + \ldots + x_1 x_2 \ldots x_{n-1}]_{x_i = x}\\ &= x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}\\ &= n x^{n-1}.\end{aligned}$$

Een tweede nuttige regel bij het differentiëren is de volgende.

Stelling 2 *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie op $[a, b]$. Dan is f integreerbaar over $[a, b]$ en is de functie*

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$$

differentieerbaar op (a, b). Bovendien geldt er

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\ dt = f(x).$$

Maar wat zijn nou situaties waarin je zou willen differentiëren? Het kan vaak handig zijn bij ongelijkheden. Zo geeft de afgeleide je informatie of een functie bijvoorbeeld stijgend of convex is. In het bijzonder als je twee differentieerbare functies $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ hebt die voldoen aan $f(a) \geq g(a)$ en $f'(x) \geq g'(x)$ voor alle $x \in (a, b)$ dan geldt $f(b) \geq g(b)$.
Echter, er kan gelden $f(x) \geq g(x)$ voor alle $x \in [a, b]$, maar dat dit trucje niet gaat werken. Bekijk maar x en $100 - x$ op $[0, 1]$. Toevallig kan je dit nu toch toepassen vanaf de andere kant, maar dat

hoeft zeker niet altijd zo te zijn: $x \mapsto x, 100 + \sin x$ op $[0,1]$ is daar dan weer een tegenvoorbeeld van.
Soms moet je eerst de opgave generaliseren om een überhaupt functie te krijgen. Zoals in de volgende voorbeeldopgave.

Voorbeeldopgave 1 (Putnam 1973) *Op* $[0,1]$ *is* f *een continu differentieerbare functie met* $0 < f'(x) \leq 1$*. Gegeven is ook dat* $f(0) = 0$*. Bewijs dat*

$$\left(\int_0^1 f(x)\ dx\right)^2 \geq \int_0^1 f(x)^3\ dx.$$

Geef een voorbeeld van een functie waarvoor gelijkheid geldt.

Laten we eerst even kijken wanneer er gelijkheid geldt. We proberen eerst maar wat. De constante functie 0 mag niet, dus dan maar $f(x) = x$ proberen. Dat geeft namelijk gelijkheid bij $f'(x) \leq 1$. Blijkbaar geeft dit inderdaad gelijkheid.
Nu blijkt het regelmatig handig om bij ongelijkheden tussen integralen te generaliseren en dan af te leiden. Dus zou het misschien zo kunnen zijn dat

$$\left(\int_0^t f(x)\ dx\right)^2 \geq \int_0^t f(x)^3\ dx$$

voor alle $t \in [0,1]$? Dit kunnen we even testen voor $f(x) = x$ en iets anders als $f(x) = \frac{1}{2}x$. In het eerste geval krijgen we gelijkheid voor alle t en in het tweede geval geldt de ongelijkheid in ieder geval. Dus misschien is het wel een goed idee om dit te bewijzen.
Hoe gaan we dat nou bewijzen? We volgen de hint in de tekst hierboven: definieer $G(t) = \left(\int_0^t f(x)\ dx\right)^2 - \int_0^t f(x)^3\ dx$. Dan geldt $G(0) = 0$ en we berekenen

$$G'(t) = 2\left(\int_0^t f(x)\ dx\right) f(t) - f(t)^3.$$

We willen $G(t) \geq 0$ en het is dus voldoende te bewijzen dat $G'(t) \geq 0$ voor $t \in [0,1]$. Aangezien $f(t) \geq 0$ is het dus voldoende te bewijzen dat

$$H(t) = 2\left(\int_0^t f(x)\ dx\right) - f(t)^2$$

niet-negatief is voor $t \in [0,1]$. Aangezien $H(0) = 0$ is, hoeven we enkel aan te tonen dat $H'(t) \geq 0$. We berekenen eenvoudig

$$H'(t) = 2f(t) - 2f(t)f'(t)$$

en dat is overduidelijk niet-negatief.
Uiteraard moeten we nu nog het bewijs in de andere volgorde opschrijven, want we werken altijd van wat we weten naar wat we willen bewijzen.

Opgaven

Opgave 1 *Vind alle reëelwaardige continu differentieerbare functies* f *gedefinieerd op de reële lijn, zo dat voor alle* x *geldt*

$$f(x)^2 = \int_0^x \left[f(t)^2 + f'(t)^2\right]\ dt + 1990.$$

Opgave 2 *Bewijs dat*

$$e^{\frac{1}{e}} + e^{\frac{1}{\pi}} \geq 2e^{\frac{1}{3}}.$$

Opgave 3 (Putnam 1940) *Gegeven dat* $n > 8$*. Welke van de twee getallen* $\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}}$ *en* $\sqrt{n+1}^{\sqrt{n}}$ *is groter?*

Opgave 4 *Vind alle continue functies* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *die voldoen aan*

$$f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1, \qquad \textit{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

Opgave 5 (Putnam 1946) *Voor integreerbare functie* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definieren we* $I(f)$ *als*

$$\int_1^x f(t)\,dt.$$

Laat a*,* b*,* c *en* d *polynomen met reële coëfficiënten zijn. Bewijs dat*

$$I(ac)I(bd) - I(ad)I(bc)$$

deelbaar is door $(x-1)^4$*.*

Opgave 6 (IMC 2015) *Bereken*

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}\,dx.$$

Opgave 7 (Putnam 1964) *Definieer voor* $n \geq 1$ *de rij*

$$a_n = 2\frac{(1+\frac{1}{n})^{2n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n + (1+\frac{1}{n})^{n+1}}.$$

Bewijs dat a_n *een strikt monotoon stijgende rij is.*

Coda

We kunnen ook het volgende bewijs geven van de voorbeeldopgave. Het is weinig inzichtelijk, maar wel mooi en daarom kan ik het jullie niet onthouden. We geven even geen argument voor de stappen, maar daar komen jullie vast zelf uit.
We schrijven

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 f(x)\ dx\right)^2 &= \left(\int_0^1 f(x)\ dx\right)\left(\int_0^1 f(y)\ dy\right) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)\ dx\ dy \\
&= \int_0^1 f(x) \int_0^x 2f(y)\ dy\ dx \\
&\geq \int_0^1 f(x) \int_0^x 2f(y)f'(y)\ dy\ dx \\
&= \int_0^1 f(x)(f(x)^2 - f(0)^2)\ dx \\
&= \int_0^1 f(x)^3\ dx.
\end{aligned}$$

We maken hier wel gebruik van het feit dat de functie niet-negatief is op $[0,1]$, zowel bij de ongelijkheid als bij het rommelen met de integraaltekens.

Einde van het coda