Week 17: Combinatoriek II (set 1)

In deze set behandelen we het ladeprincipe, invariantie en kleuringen.

Het ladeprincipe is eigenlijk heel eenvoudig. Als je $kn+1$ balletjes verdeelt over $n+1$ lades, dan is er minstens een lade met minstens $k+1$ balletjes.

Voorbeeldopgave 1 *Zij $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ en $n \in \mathbb{Z}$. Bewijs dat er $(h,k) \in \mathbb{Z} \times \{1,\ldots,n-1\}$ bestaat zodat*

$$0 \leqslant |k\alpha - h| < \frac{1}{n}.$$

Hier is het idee om de getallen $a_k := k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor$ te bekijken voor $k = 1,\ldots,n-1$. We definiëren n intervallen: $I_i := [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$ voor $i = 1,\ldots,n$. Als één van de a_k in I_1 of I_n ligt, dan zijn we klaar. Stel dat dat niet zo is. Dan liggen de $n-1$ getallen a_k verdeeld over $n-2$ overgebleven intervallen I_i (voor $i = 2,\ldots,n-1$). In het bijzonder zijn er een i en $k < \ell$ zodat $a_k, a_\ell \in I_i$. Dan vinden we dat

$$|(\ell - k)\alpha| < \frac{1}{n}$$

en zijn we klaar.

Bij invariantie is het idee om aan de hand van de opgave een 'grootheid' te vinden die invariant blijft onder de operaties in de opgave. Om dit te illustreren volgt hier een voorbeeld.

Voorbeeldopgave 2 *In een rij van tien bomen zit in elke boom een spreeuw. Op het moment dat een spreeuw een willekeurig aantal k bomen naar rechts vliegt, vliegt een andere spreeuw k bomen naar links. Kunnen alle spreeuwen uiteindelijk in één boom komen? Wat als er elf bomen zijn?*

Bij deze opgave nummeren we de bomen en de spreeuwen 1 tot en met 10. De positie van de i-de spreeuw noemen we c_i. Als er een spreeuw k bomen naar rechts en een andere spreeuw k bomen naar links vliegt, dan blijft $\sum_{i=1}^{10} c_i$ onveranderd. In de beginsituatie is dit $1 + \ldots + 10 = 55$. Dit is niet deelbaar door 10 en daardoor is het onmogelijk dat alle spreeuwen uiteindelijk in dezelfde boom terechtkomen. Voor 11 bomen doet dit probleem zich niet voor en zien we snel dat er een oplossing is door de spreeuwen van bomen 1 en 11 naar boom 6 te laten vliegen, die van bomen 2 en 10 naar boom 6, enzovoorts. We kunnen dezelfde invariant weer gebruiken om te laten zien dat het niet mogelijk is dat de 11 spreeuwen met z'n allen in een andere boom dan boom 6 terechtkomen.

Voor sommige opgaven is het zinvol om juist een (non-)invariant te vinden die telkens op dezelfde manier verandert, zoals bijvoorbeeld een steeds wisselende pariteit. Soms is het ook handig om gebruik te maken van zogenaamde half-invarianten. Dit zijn 'grootheden' die niet per se gelijk blijven, maar alleen kunnen stijgen of dalen. De variaties zijn eindeloos.

Een ander nuttig thema is: kleuringen. Dit zal worden geïllustreerd aan de hand van het volgende voorbeeld.

Voorbeeldopgave 3 *Beschouw een schaakbord waar de linkerbovenhoek en de rechteronderhoek van afgezaagd zijn. Laat zien dat het onmogelijk is het schaakbord met 31 dominostenen te bedekken.*

De oplossing vind je hier door op te merken dat een dominosteen altijd één wit en één zwart vakje bedekt. Het afgezaagde schaakbord heeft 30 witte en 32 zwarte vakjes. Daarom is het onmogelijk het te bedekken met 31 dominostenen.

Opgaven: ladeprincipe

Opgave 1 *Gegeven zijn* 19 *verschillende getallen in de verzameling* $\{1, 4, 7, \ldots, 100\}$*. Bewijs dat er twee verschillende van die getallen bestaan met som* 104*.*

Opgave 2 *Op een feest zijn meerdere mensen. Bewijs dat er twee mensen zijn die evenveel personen op het feest kennen.*

Opgave 3 *Een collectie deelverzamelingen uit* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *heeft de eigenschap dat ieder tweetal een niet-lege doorsnede heeft. Bewijs dat de collectie uit maximaal* 2^{n-1} *deelverzamelingen bestaat.*

Opgave 4 *Zij* n *een positief geheel getal. Bewijs dat er een getal van de vorm*

$$11 \ldots 1100 \ldots 00$$

bestaat dat deelbaar is door n*.*

Opgave 5 (belangrijk) *Gegeven zijn* n *gehele getallen. Bewijs dat er een niet-lege deelverzameling van deze getallen bestaat, waarvan de som deelbaar is door* n*.*

Opgave 6 *Gegeven zijn* $n + 1$ *gehele getallen tussen* 1 *en* $2n$*. Bewijs dat er voor twee van deze getallen geldt dat de ene de ander deelt.*

Opgaven: invariantie en kleuringen

Opgave 7 *De getallen 1 tot en met 2015 staan in een rij. In een stap mag je twee getallen die naast elkaar staan, omwisselen. Is het mogelijk dat na 2015 stappen de getallen weer precies staan zoals in het begin?*

Opgave 8 *Gegeven is een drietal getallen. Nu mag je er steeds twee uitkiezen, zeg* a *en* b*, en deze vervangen door* $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ *en* $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ *. Kun je het drietal* $(1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ *in een aantal stappen vervangen door het drietal* $(2, 2, \sqrt{2})$*?*

Opgave 9 *In de landen Dillia en Dallia is de valuta respectievelijk dillers en dallers. In Dillia is de wisselkoers 10 dillers voor 1 daller. In Dallia is de wisselkoers 10 dallers voor 1 diller. Een handelaar begint met 1 diller en mag vrij reizen tussen de landen en geeft geen geld uit.*

(a) Laat zien dat de handelaar op geen enkel moment precies 35 eenheden geld (dat is, dillars of dallers) heeft.

(b) Laat zien dat als de handelaar geen geld uitgeeft, hij nooit evenveel dillers als dallers kan krijgen.

Opgave 10 *Van een* 2015×2015*-bord is het vakje linksboven afgehakt. Kun je de overige vakjes bedekken met net zoveel horizontale als verticale dominostenen (dus net zoveel stenen van 2 breed en 1 hoog als stenen van 1 breed en 2 hoog)?*

Opgave 11 *Op een willekeurig groot schaakbord bekijken we een gegeneraliseerd paard dat* p *stappen in een richting en* q *stappen in de andere richting springt met* $p, q > 0$*. Bewijs dat zo'n paard alleen na een even aantal stappen kan terugkeren naar z'n oorspronkelijke vakje.*