Week 22: De macht van het spoor en het spoor van de macht

Een belangrijke invariant van een lineaire afbeelding is het spoor. Als we een basis kiezen dan is het spoor simpelweg de som van de elementen op de diagonaal. Aangezien $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$ is het spoor van een matrix invariant onder conjugatie.

We weten ook het volgende.

Stelling 1 *Het spoor van een lineaire afbeelding is de som van de eigenwaarden.*

We kunnen dit bewijzen door een matrix in bovendriehoeksvorm te schrijven.

De meest gebruikte toepassing is wanneer de rang van de matrix heel klein is. We weten immers

$$\begin{aligned}\text{Dimensie van de kern} &= \text{maximale aantal lineair onafhankelijke eigenvectoren bij eigenwaarde } 0\\ &\leq \text{multipliciteit eigenwaarde } 0\\ &= \text{kleinste graad die voorkomt in het karakteristieke polynoom.}\end{aligned}$$

In het bijzonder is het spoor bij een matrix van rang maximaal 1 gelijk aan de 'laatste' eigenwaarde. Al kan deze natuurlijk ook nul zijn, terwijl de matrix dat niet is.

Het spoor van een lineaire afbeelding geeft niet heel veel informatie, maar als we het spoor weten van veel machten van de afbeelding, dan kunnen we heel veel afleiden.

Stelling 2 *Zij A een lineaire afbeelding van een lineaire ruimte van dimensie n naar zichzelf over een lichaam van karakteristiek 0. De getallen*

$$\mathrm{Sp}(A), \mathrm{Sp}(A^2), \ldots, \mathrm{Sp}(A^n)$$

bepalen het karakteristieke polynoom en daarmee de eigenwaarden.

We kunnen dit als volgt bewijzen: laat $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de eigenwaarden zijn van A. Dan zijn $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ de eigenwaarden van A^k, dus

$$\mathrm{Sp}(A^k) = \lambda_1^k + \ldots + \lambda_n^k.$$

We kunnen nu gebruik maken van wat we weten over symmetrische polynomen. Voor de volledigheid herhalen we die theorie nog even hieronder.

Gevolg 3 *Een vierkante matrix over lichaam van karakteristiek 0 is nilpotent dan en slechts dan als $\mathrm{Sp}(A^k) = 0$ voor alle $k \geq 1$.*

Symmetrische polynomen

Definitie 1 *Een symmetrisch polynoom in n variabelen $x_1, \ldots, x_n$ is een polynoom in deze variabelen dat invariant is onder een willekeurige permutatie van de n variabelen.*

Zo zijn x_1x_2, $x_1 + x_2$ en $x_1x_2 + 3x_1^7 + 3x_2^7$ symmetrische polynomen in 2 variabelen, maar niet in 3 variabelen. Er is een aantal symmetrische polynomen die wat extra aandacht verdienen.

Definitie 2 *De symmetrische polynomen in n variabelen*

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= 1,\\
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n,\\
\sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,\\
&\vdots\\
\sigma_n &= x_1x_2\ldots x_n
\end{aligned}$$

noemen we de elementaire symmetrische polynomen in n variabelen. Merk op dat σ_k een homogeen polynoom is van graad k en $\binom{n}{k}$ termen heeft.

Deze symmetrische polynomen zijn om meerdere redenen belangrijk. Een van deze redenen is dat het op teken na de coëfficiënten zijn van het monische polynoom met de x_i als nulpunten:

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^n\sigma_n.$$

Verder hebben ook het volgende resultaat.

Stelling 4 *Zij p een symmetrisch polynoom in n variabelen van graad d over een commutatieve ring R met eenheid. Dan is p op een unieke manier te schrijven als polynoom in σ_1, σ_2, …, σ_d over R.*

Het bewijs gaat met inductie naar de gegeneraliseerde graad. Het is handig om hier even bij stil te staan aangezien het je leert hoe je deze schrijfwijze kan vinden.

De gegeneraliseerde graad van een monoom $\prod x_i^{d_i}$ is het n-tal getallen $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. We ordenen nu de graden als volgt: $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ is groter dan $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ precies als $d_k > e_k$ geldt voor de kleinste k waarvoor $d_k \neq e_k$. Zij nu $c\prod x_i^{d_i}$ de monomoom met de grootste graad van je polynoom p. Dan blijkt $p - c\sigma_1^{d_1-d_2}\sigma_2^{d_2-d_3}\ldots\sigma_k^{d_k}$ een kleine graad heeft.

Het is niet geheel gemakkelijk te onthouden hoe dit ook al precies werkt, dus het kan handig zijn om te onthouden hoe dit in een specifiek geval werkt. Bijvoorbeeld

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2.$$

De maximale graad is $(2,1,1)$ en we willen uiteraard $\sigma_1^1\sigma_2^0\sigma_3^1$.

We voeren het algoritme ook nog even uit voor $xy + 3x^7 + 3y^7$. De maximale graad is $(7,0)$ dus krijgen

$$\begin{aligned}
p - 3\sigma_1^7\sigma_2^0 &= xy + 3x^7 + 3y^7 - 3(x+y)^7\\
&= xy + 3x^7 + 3y^7 - 3(x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7)\\
&= xy - 21x^6y - 63x^5y^2 - 105x^4y^3 - 105x^3y^4 - 63x^2y^5 - 21xy^6.
\end{aligned}$$

Nu is de maximale graad $(6,1)$, dus kijken we naar

$$\begin{aligned}
p - 3\sigma_1^7 + 21\sigma_1^5\sigma_2^1 &= xy - 21x^6y - 63x^5y^2 - 105x^4y^3 - 105x^3y^4 - 63x^2y^5 - 21xy^6 + 21(x+y)^5xy\\
&= xy - 21x^6y - 63x^5y^2 - 105x^4y^3 - 105x^3y^4 - 63x^2y^5 - 21xy^6\\
&+ 21(x^6y + 5x^5y^2 + 10x^4y^3 + 10x^3y^4 + 5x^2y^5 + xy^6)\\
&= xy + 42x^5y^2 + 105x^4y^3 + 105x^3y^4 + 42x^2y^5.
\end{aligned}$$

Nu gaan we over op $(5,2)$:

$$\begin{aligned}
p - 3\sigma_1^7 + 21\sigma_1^5\sigma_2^1 - 42\sigma_1^3\sigma_2^2 &= xy + 42x^5y^2 + 105x^4y^3 + 105x^3y^4 + 42x^2y^5 - 42(x+y)^3x^2y^2 \\
&= xy + 42x^5y^2 + 105x^4y^3 + 105x^3y^4 + 42x^2y^5 - 42(x^5y^2 + 3x^4y^3 + 3x^3y^4 + x^2y^5) \\
&= xy - 21x^4y^3 - 21x^3y^4.
\end{aligned}$$

Nu nog de term met graad $(4,3)$:

$$\begin{aligned}
p - 3\sigma_1^7 + 21\sigma_1^5\sigma_2^1 - 42\sigma_1^3\sigma_2^2 + 21\sigma_1\sigma_2^3 &= xy - 11x^4y^3 - 11x^3y^4 + 21(x+y)x^3y^3 \\
&= xy \\
&= \sigma_2.
\end{aligned}$$

Dus

$$p = 3\sigma_1^7 - 21\sigma_1^5\sigma_2^1 + 42\sigma_1^3\sigma_2^2 - 21\sigma_1\sigma_2^3 + \sigma_2.$$

Nu zouden we dit graag even controleren. We zien dat $y = 0$ aan beide kanten $3x^7$ op levert. Verder als $x = y = 1$ hebben we $p(x,y) = 7$ en $\sigma_1 = 2$ en $\sigma_2 = 1$ en inderdaad

$$7 = 3 \cdot 2^7 - 21 \cdot 2^5 + 42 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2 + 1.$$

Andere interessante symmetrische polynomen zijn uiteraard

$$p_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

Het blijkt dat een bijzondere relatie te bestaan tussen de σ_k en de p_k.

Stelling 5 (De identiteiten van Newton) *Er geldt*

$$\begin{aligned}
p_1 &= \sigma_1, \\
p_2 &= \sigma_1 p_1 - 2\sigma_2, \\
p_3 &= \sigma_1 p_2 - \sigma_2 p_1 + 3\sigma_3, \\
&\vdots \\
p_k &= \sigma_1 p_3 - \sigma_2 p_{k-1} + \ldots - (-1)^k k\sigma_k.
\end{aligned}$$

De vorige stelling zei dat iedere p_k leeft in $\mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k]$. Dit geeft ons een expliciete manier om zo'n uitdrukking te vinden. Ook vinden we direct dat iedere σ_k leeft in $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots, p_k]$. We kunnen hier niet over $\mathbb{Z}$ werken, want we moeten k kunnen inverteren.

Gevolg 6 *Zij p een symmetrisch polynoom over een domein R. Dan kunnen we p op een unieke manier schrijven als een polynoom over het breukenlichaam van R als een polynoom in p_1, p_2, …, p_k.*

Opgaven

Opgave 1 *Vind een $n \times n$-matrix die voldoet aan $\mathrm{Sp}(A^k) = 0$ voor alle $k \geq 1$, maar niet nilpotent is.*

Opgave 2 *Als α, β en γ de nulpunten zijn van een polynoom $x^3 + ax^2 + bx + c$, vind dan het monische polynoom waarvan de wortels α^3, β^3 en γ^3 zijn.*

Opgave 3 *Bewijs stelling 2 en gevolg 3.*

Opgave 4 (IMC 2000) *Gegeven zijn twee vierkante complexe matrices A en B van dezelfde dimensie zo dat de rang van $AB - BA$ gelijk is aan 1. Bewijs dat $(AB - BA)^2 = 0$.*

Opgave 5 (IMC 1994) *Gegeven zijn een $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ en twee lineaire afbeeldingen F en G van $\mathbb{R}^n$ naar zichzelf, zo dat $F \circ G - G \circ F = \alpha F$.*

a) Laat zien dat voor alle $k \in \mathbb{N}$ geldt $F^k \circ G - G \circ F^k = \alpha k F^k$.

b) Bewijs dat er een k bestaat zo dat $F^k = 0$.

Opgave 6 *Gegeven zijn reële getallen a, b en c. Laat zien dat $a \geq 0$, $b \geq 0$ en $c \geq 0$ dan en slechts dan als $a + b + c \geq 0$, $ab + bc + ca \geq 0$ en $abc \geq 0$.*

Opgave 7 (LIMO 2009) *Stel M is een $n \times n$-matrix van rang 1. Laat zien dat*

$$M^2 = (\det(I + M) - 1)M.$$

Opgave 8 (Vojtech Jarnik 2010) *Gegeven zijn twee complexe 2×2-matrices die voldoen aan $AB - BA = B^2$. Bewijs dat $AB = BA$.*

Opgave 9 (LIMO 2010) *Zij n een natuurlijk getal groter dan een. Bepaal alle $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ met de eigenschap dat er voor alle natuurlijke getallen k met $1 \leq k < n$ geldt dat $z_1^k + z_2^k + \ldots + z_n^k = 0$.*

Opgave 10 *Zij $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ zo dat $A^2 + B^2 = 2AB$. Bewijs dat $AB = BA$ en dat $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B$.*

Opgave 11 *laat $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ twee $n \times n$-matrices zijn zo dat*

$$A^2B + BA^2 = 2ABA.$$

Bewijs dat er een k bestaat zo dat $(AB - BA)^k = 0$.

Opgave 12 *Vind de nulpunten van het polynoom*

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25$$

gegeven dat de som van twee van de nulpunten gelijk is aan 4.

Opgave 13 (IMO Shortlist 1971) *Gegeven dat het systeem*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 15, \\ x^4 + y^4 + z^4 &= 35 \end{aligned}$$

een reële oplossing heeft die voldoet aan $x^2 + y^2 + z^2 < 10$, vind de waarde van $x^5 + y^5 + z^5$ voor deze x, y en z.

Opgave 14 (HMMT 2007) *Gegeven is dat* α_1, α_2, α_3 *en* α_4 *vier verschillende nulpunten van het polynoom* $x^4 + 2x^3 + 2$ *zijn. Bepaal de elementen van de verzameling*

$$\{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4, \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4, \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\}.$$