Week 23: reeksen (set 1)

- Een reeks is een speciaal soort rij, dus: denk altijd eerst na over convergentie! In het bijzonder: monotone, begrensde rijen convergeren.
- Voor reeksen zijn meer convergentietesten: absolute convergentie impliceert convergentie, afschatten met absoluut convergente rij, ratiotest, integraaltest, worteltest, enzovoorts.
- Let op bij het verwisselen van oneindige sommen! Als alles absoluut convergeert gaat het eigenlijk altijd goed.
- Als je daadwerkelijk een limiet moet bepalen, reken eerst een aantal termen uit en vorm een vermoeden. Bekijk ook het verschil van de partiële sommen met je vermoeden. Dit geldt uiteraard ook voor algemene rijen.
- Het kan vaak helpen om breuken te splitsen.
- Soms krijg je een mooie telescoopreeks. Let wel op ook dan de partiële sommen convergeren. Vaak is in deze gevallen het verschil van de partiële sommen met de limiet erg mooi!

Bekijken deze strategie op de volgende opgave, die we op meerdere manieren zullen oplossen.

Voorbeeldopgave 1 *Bepaal*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Nu gaan we eerst maar eens wat termen uitrekenen. Daartoe definiëren we

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)}$$

en bekijken we de volgende tabel:

k	1	2	3	4
$\frac{1}{k(k+1)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$
s_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

Nu krijgen we het vermoeden dat $s_k = \frac{k}{k+1}$, wat we natuurlijk testen voor $k = 5$ en vervolgens met inductie kunnen bewijzen. Het volgt nu eenvoudig dat $s_k \to 1$ voor $k \to \infty$.

Stel nu dat we de regelmaat in s_k niet zagen, dan is een nuttige volgende stap om in ieder geval te bedenken wat de limiet zou moeten worden. Die lijkt in de tabel wel 1 te zijn en dan kunnen we nu kijken naar het verschil van s_k met 1.

k	1	2	3	4
$1 - s_k$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

Nu zien we dat $1 - s_k = \frac{1}{k+1}$ en zien we dat de s_k inderdaad naar 1 convergeren.

Hoe we dit ook hadden kunnen zien is door breuken te splitsen: er bestaan A en B zo dat voor alle n geldt

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}.$$

Hieruit volgt dat $A = 1$ en $B = -1$ en dus

$$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Opgaven

Opgave 1 *Bepaal*

$$\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots$$

Opgave 2 *Bereken*

$$\frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4} - \frac{9}{4 \cdot 5} + \dots$$

In de volgende opgave zijn F_i de Fibonacci-getallen gegeven door $F_0 = 1 = F_1$.

Opgave 3 *Bepaal*

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}};$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}.$$

Opgave 4 *Druk*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k}{(3^{k+1} - 2^{k+1})(3^k - 2^k)}$$

uit als rationaal getal.

Opgave 5 *Bereken het oneindige product*

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}.$$

Opgave 6 *Definieer een rij* $a_0, a_1, \dots$ *door* $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$ *en*

$$a_{n+1} = \frac{n a_n^2}{1 + (n+1)a_n} \qquad \textit{voor} \qquad n \geq 1.$$

Laat zien dat de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ *convergeert en bepaal de limiet.*

Opgave 7 *Zij* T *de verzameling van drietallen* (a, b, c) *van positieve gehele getallen waarvoor er een driehoek bestaat met zijdelengtes* a, b, c. *Bepaal*

$$\sum_{(a,b,c) \in T} \frac{2^a}{3^b 5^c}.$$

Opgave 8 *Vind alle reële getallen* $\alpha > 0$ *waarvoor geldt dat*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2012}{(n + \alpha)(16n + 2012)} = 1.$$

Opgave 9 *Bereken*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots$$

Opgave 10 *Zij* $F(0) = 0$, $F(1) = \frac{3}{2}$ *en* $F(n) = \frac{5}{2}F(n-1) - F(n-2)$ *voor* $n \geq 2$. *Bepaal*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F(2^n)}.$$

Opgave 11 *Bereken het rationale getal*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n + mn^2 + 2mn}.$$

Opgave 12 *Bepaal de waarde van*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 n}{3^m (n3^m + m3^n)}.$$