# Week 4: Ongelijkheden I (set II)

Deze set gaat over ongelijkheden. Hier volgt een van de twee belangrijkste dingen die we deze week gaan gebruiken.

**Stelling 1** *Het product van twee positieve reële getallen is positief. Hieruit volgt dat ook het product van twee negatieve getallen positief is.*

Dit geeft meteen het volgende nuttige gevolg.

**Gevolg 1** *Zij $x$ een reëel getal. Dan geldt*

$$x^2 \geq 0.$$

*Bovendien geldt er alleen gelijkheid als $x = 0$.*

Deze ongelijkheid is al heel krachtig samen met inductie. Kijk maar eens naar de volgende opgave.

**Voorbeeldopgave 1** *Laat $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ reële getallen zijn die bovendien voldoen aan $y_i > 0$ voor alle $i$. Bewijs de volgende ongelijkheid*

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}.$$

We gaan inductie doen naar het aantal variabelen. Stel dat we de inductiebasis (het geval $n = 2$) al gedaan hebben. Merk op dat de inductiestap dan zeker niet meer het lastigste is:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} + \frac{x_{n+1}^2}{y_{n+1}} &= \left(\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n}\right) + \frac{x_{n+1}^2}{y_{n+1}} \\
&\geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n} + \frac{x_{n+1}^2}{y_{n+1}} \\
&\geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1})^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n + y_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Waar we in de laatste stap het resultaat voor $n = 2$ hebben gebruikt. Het enige wat we nu nog moeten doen is de inductiebasis, en die laten we aan jullie zelf over.

Soms moet je op een andere manier inductie dus, zoals in het volgende klassieke voorbeeld.

**Voorbeeldopgave 2** *Laat $a_1, \ldots, a_n$ niet-negatieve reële getallen zijn. Dan geldt*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

We volgen het volgende opvallende stappenplan:

- bewijs de ongelijkheid voor $n = 2$;
- bewijs dat als de ongelijkheid geldt voor een zekere $n$, dan geldt zij ook voor $2n$;
- bewijs dat als de ongelijkheid geldt voor een zekere $n$, dan geldt zij ook voor $n - 1$.

De eerste stap is weer niet de moeilijkste en die gaan jullie zelf doen.
Dan voor tweede stap: stel dat de ongelijkheid waar is voor een zekere positieve gehele $n$. Dan geldt

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}}{2n} &= \frac{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}}{n}}{2} \\
&\geq \frac{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{2n}}}{2} \\
&\geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{2n}}} \\
&= \sqrt[2n]{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{2n}}.
\end{aligned}$$

Dus de ongelijkheid geldt inderdaad ook voor $2n$.

Nu komt de meest magische stap van het hele verhaal: stel wederom dat de ongelijkheid waar is voor een zekere positieve gehele $n$. Pas de ongelijkheid toe op de $n$ getallen

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}.$$

We weten dat de ongelijkheid waar is voor deze $n$ getallen, dus krijgen we

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}}.$$

Nu herschrijven we de linkerkant

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}}{n} &= \frac{(n-1)\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1} + \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}}{n} \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}. \end{aligned}$$

Dus de ongelijkheid wordt dan

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}}$$

en als we de $n$-de macht nemen, daar verandert het teken niet door want beide kanten zijn niet-negatief:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}\right)^n \geq a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}.$$

Dus

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \geq a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$$

waar de ongelijkheid uit volgt voor $n-1$.

Als je een dergelijke toepassing wil doen, dan zal je vaak voor dat $n$-de getal het rekenkundig gemiddelde moeten invullen, maar soms werkt het meetkundig gemiddelde juist beter.

Maar de ongelijkheid in deze opgave gaan we deze week nog niet gebruiken. Deze week gaat het alleen over: voor alle reële $x$ geldt $x^2 \geq 0$ en inductie. Het is dus mogelijk dat je bij inductie zoiets raars moet doen zoals hierboven, maar probeer het natuurlijk altijd eerst op een normale manier. Soms kan je iets sterkers formuleren wat je opeens wel met inductie kan bewijzen. Zoals in de volgende opgave.

**Voorbeeldopgave 3** *Bewijs dat voor iedere positieve gehele $n$ geldt dat*

$$\frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Dit lijkt niet met inductie te kunnen, want de rechterkant is constant. Daarom gaan we de een sterkere uitspraak bewijzen: we vervangen die twee door iets kleiners. We willen dus kleine uitdrukkingen $\varepsilon_n$ vinden zo dat

$$\frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \varepsilon_n.$$

Uiteraard moeten de $\varepsilon_n$'netjes steeds kleiner worden en is het hoogstwaarschijnlijk een rationale functie in $n$. Om de inductiestap goed te laten verlopen moet er ook voor elke $n$ gelden dat

$$\varepsilon_n - \frac{1}{(n+1)^2} \geq \varepsilon_{n+1}.$$

Het is nu eenvoudig aangetoond dat $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ gaat werken.

## Opgaven

**Opgave 1** *Laat* $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *reële getallen zijn die bovendien voldoen aan* $y_i > 0$ *voor alle* $i$. *Bewijs de volgende ongelijkheid*

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}.$$

**Opgave 2** *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *een functie die voldoet aan* $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ *voor alle* $x, y \in \mathbb{R}$. *Bewijs dat*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

*voor alle* $n$*-tallen* $x_1, \ldots, x_n$ *van reële getallen.*

**Opgave 3** *Wat gebeurt er als in het bewijs van de ongelijkheid van het meetkundig en het rekenkundig gemiddelde in de stap van* $n$ *naar* $n-1$ *voor de* $n$*-de variabele het meetkundig gemiddelde neemt en niet het rekenkundig gemiddelde?*

**Opgave 4 (Putnam 1978)** *Gegeven is een* $a_{ij} \in [0, 1]$ *voor alle gehele* $i, j \geq 1$. *Bewijs dat*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{mi} \frac{a_{ij}}{i}\right)^2 \leq 2m \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{mi} a_{ij}.$$

**Opgave 5** *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *een continue functie zodanig dat voor elk geheel getal* $k \geq 1$ *het volgende geldt:*

$$\int_0^k f(x)^2 \, dx = \int_0^k f(x) f(k - x) \, dx.$$

*Bewijs dat* $f(2013) = f(2014)$.

**Opgave 6** *Gegeven zijn niet-negatieve* $a_i$ *voor* $1 \leq i \leq n$ *die voldoen aan* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. *Bewijs dat*

$$(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3) \ldots (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) \geq 4^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n.$$

**Opgave 7 (Herschikkingsongelijkheid)** *Laat* $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$ *reële getallen zijn. Bewijs dat voor iedere permutatie* $\sigma$ *van* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *geldt dat*

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \geq x_1 y_{\sigma(1)} + x_2 y_{\sigma(2)} + \ldots + x_n y_{\sigma(n)}.$$

**Opgave 8 (IMC 2016)** *Zij* $n$ *een positief geheel getal. Verder zijn* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *en* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *reële getallen zo dat* $a_i + b_i > 0$ *voor* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Bewijs dat*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i - b_i^2}{a_i + b_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)}.$$

**Opgave 9 (IMC 2010)** *Laat* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *positieve reële getallen zijn zo dat* $a_{k+1} - a_k \geq 1$ *voor alle* $k = 0, 1, \ldots, n-1$. *Bewijs dat*

$$1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

**Opgave 10** *Gegeven zijn reële getallen* $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n+1}$. *Bewijs de ongelijkheid*

$$\sqrt[n]{a_1 - a_2 + a_3 - \ldots - a_{2n} + a_{2n+1}} \geq \sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2} + \sqrt[n]{a_3} - \ldots - \sqrt[n]{a_{2n}} + \sqrt[n]{a_{2n+1}}.$$