# Week 7: Polynomen I (set 1)

- Polynomen zijn formele expressies van de vorm $c_0+c_1\cdot x+\ldots+c_n\cdot x^n$, waarbij de coëfficiënten $c_i$ in een ring zitten (bijvoorbeeld $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$). Polynomen hebben een graad, de grootste macht van $x$ die voorkomt in het polynoom. Het nulpolynoom heeft geen graad, of soms zegt men ook wel dat het graad $-\infty$ heeft.
- Met polynomen kun je staartdeling uitvoeren. Je krijgt dan, net als met gehele getallen een quotiënt en een rest. Als je $x^3$ bijvoorbeeld deelt door $x^2+1$ dan vind je $x$ als quotiënt en $-x$ als rest: $x^3 = x\cdot(x^2+1)-x$. De rest moet van lagere graad zijn dan hetgene waar je door deelt.
- Hier volgen een aantal nuttige resultaten die bewezen kunnen worden door middel van deling met rest.

  **Stelling 1** *Zij $P$ een polynoom met coëfficiënten in een lichaam $F$. Zij $a\in F$. Dan geldt $P(a)=0$ dan en slechts dan als $P(x)=Q(x)(x-a)$ voor een zeker polynoom $Q$ met coëfficiënten in $F$.*

  **Stelling 2** *Zij $P\neq 0$ een polynoom met coëfficiënten in een lichaam. Dan is het aantal nulpunten van $P$ van boven begrensd door de graad van $P$.*

- Als je een polynoom krijgt, dan is het altijd zinvol om naar ontbindingen danwel nulpunten te zoeken. Probeer wat kleine getallen uit, zoek naar verschillen van kwadraten, et cetera.
- Moet je een polynomiale gelijkheid bewijzen in meerdere variabelen, beschouw het als polynoom in een van de variabelen en bewijs dat beide kanten dezelfde nulpunten hebben.
- Ten slotte geven we jullie nog de formules van Vièta. Als je de nulpunten van een polynoom weet, kun je namelijk de coëfficiënten berekenen. Bijvoorbeeld

  $$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$$

  In het algemeen worden de coëfficiënten van een polynoom met gegeven nulpunten gegeven door elementaire symmetrische uitdrukkingen in de nulpunten.

## Opgaven

**Opgave 1** *Bepaal alle reële polynomen $P(x)$ die voldoen aan $P(x^2+1)=P(x)^2+1$ en $P(0)=0$.*

**Opgave 2** *Zij $n$ een even positief geheel getal. Het polynoom $p\in\mathbb{R}[X]$ heeft graad $n$ en voldoet voor alle gehele $1\le k\le n$ aan $p(-k)=p(k)$. Bewijs dat er een polynoom $q$ met reële coëfficiënten bestaat zo dat*

$$p(x)=q(x^2).$$

**Opgave 3** *Bewijs dat er geen polynoom $p(x)$ bestaat zodat $p(2x)=1+x\cdot p(x)$.*

**Opgave 4** *a) Laat zien dat*

$$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)=(a-b)(b-c)(c-a)$$

*zonder haakjes uit te werken.*

*b) Factoriseer*

$$ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)$$

*zonder haakjes uit te werken.*

**Opgave 5** *Bekijk alle lijnen die de grafiek $y = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5$ in vier vershcillende punten snijdt. Noem deze punten $(x_i, y_i)$ voor $1 \leq i \leq 4$. Bewijs dat $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ onafhankelijk is van de gekozen lijn en vind deze waarde.*

**Opgave 6** *Bepaal de determinant van de matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{pmatrix}$$

*In het algemeen: gegeven $n$ getallen $x_i$ met $0 \leq i \leq n-1$. Wat is de determinant van de matrix gegeven door*

$$M_{i,j} = x_i^j \quad \text{voor} \quad 0 \leq i, j \leq n-1.$$

**Opgave 7** *Vind alle polynomen $p(x)$ met reële coëfficiënten zodat $p(x^2) = p(x) \cdot p(x+2)$.*

**Opgave 8** *Laat $A$ en $B$ reële $n \times n$-matrices zijn. Neem aan dat er $n+1$ verschillende reële getallen $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ bestaan zo dat de matrices*

$$A + t_i B$$

*alle $n+1$ nilpotent zijn. Bewijs dat $A$ en $B$ nilpotent zijn.*

**Opgave 9** *Beschouw het polynoom $p(x) = 5x^3 + 4x^2 - 8x + 6$. Stel dat $a, b, c \in \mathbb{R}$ de drie nulpunten zijn. Bepaal $a(1+b+c) + b(1+a+c) + c(1+a+b)$.*

**Opgave 10** *Bewijs dat het polynoom $x^{2n} + x^n + 1$ deelbaar is door $x^2 + x + 1$ dan en slechts dan als $n \not\equiv 0 \mod 3$.*

**Opgave 11** *Zijn $a, b$ en $c$ de wortels van het polynoom $p(x) = 3x^3 - 14x^2 + x + 62$. Bepaal*

$$\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3}.$$

**Opgave 12** *Zij $p(x)$ een polynoom van graad $n$ zodat $p(k) = 2^k$ voor alle $k = 0, 1, \ldots, n$. Wat is $p(n+1)$?*