

Limieten I (set II)

Opgave 1 Laat a en b positieve reële getallen zijn. Bepaal

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}.$$

Opgave 2 Bepaal

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}.$$

Opgave 3 Zij $(a_n)_n$ een rij reële getallen die voldoet aan

$$(2 - a_n)a_{n+1} = 1.$$

Bewijs dat de limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ bestaat en bepaal deze limiet.

Opgave 4 Zij N een positief reëel getal. Begin met een willekeurige positieve x_0 en definieer

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{N}{x_n} \right).$$

Bepaal $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Opgave 5 Zij a een positief reëel getal ongelijk aan 1. Bepaal

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \frac{a^x - 1}{a - 1} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Opgave 6 Zij p reëel en ongelijk aan 0. Definieer het p -de machtsgemiddelde van n getallen x_1, x_2, \dots, x_n , als

$$M_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bewijs dat

$$\lim_{p \rightarrow 0} M_p = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Opgave 7 Bereken de limiet

$$\sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7 - \dots}}}}}$$

Opgave 8 Vind

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_0^k (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{k}} dx.$$

Opgave 9 Bepaal

$$\sqrt[8]{2207 - \frac{1}{2207 - \frac{1}{2207 - \frac{1}{2207 - \dots}}}}.$$