Week 13: Polynomen II (set II)

Eigenschappen van polynomen P en Q met gehele coëfficiënten:

- als $a \equiv b \mod m$ dan geldt $P(a) \equiv P(b) \mod m$;
- aangezien $a \equiv b \mod a-b$ als $a \neq b$, geldt er $P(a) \equiv P(b) \mod a-b$ oftewel
$$a - b \mid P(a) - P(b);$$
- als Q monisch is en we delen P door Q, dan hebben de rest en het quotient ook gehele coëfficiënten;
- in het bijzonder is $\frac{P(x)-P(a)}{x-a}$ een polynoom in x met gehele coëfficiënten.

Opgaven

Opgave 1. *Zij $P \in \mathbb{Z}[X]$ een polynoom dat voldoet aan $P(1) = 4$, $P(5) = 16$ en $P(9) = 60$. Bewijs dat P geen geheel nulpunt heeft.*

Opgave 2. *Gegeven is een polynoom P met gehele coëfficiënten zo dat $P(1) = 44$, $P(5) = 0$ en $P(9) = -12$. Bewijs dat $P(12)$ deelbaar is door 231.*

Opgave 3. *Zij P een polynoom met gehele coëfficiënten dat in drie verschillende gehele getallen de waarde 1 aanneemt. bewijs dat P geen geheel nulpunt heeft.*

Opgave 4. *Zij P een polynoom waarvan alle coëfficiënten in $\mathbb{Z}$ liggen. Gegeven zijn twee verschillende gehele getallen c en d zo dat $P(c) = d$ en $P(d) = c$. Bewijs dat de vergelijking $P(x) = x$ hoogstens een gehele oplossing heeft.*

Opgave 5. *Bestaat er een polynoom P met gehele coëfficiënten dat voldoet aan*

$$P(0)P(2) = -2?$$

Opgave 6. *Zij $P(x)$ een polynoom met gehele coëfficiṅten. Stel dat er vier verschillende gehele getallen a, b, c en d zijn zodat $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$. Laat zien dat er dan geen geheel getal k bestaat zodat $P(k) = 8$.*

Opgave 7. *Bestaat er een polynoom $P \in \mathbb{Z}[X]$ dat voldoet aan $P(0) = 2$, $P(2) = 4$ en $P(4) = 18$?*

Opgave 8. *Gegeven zijn drie verschillende gehele getallen a_1, a_2 en a_3. Bewijs dat er geen polynoom in $\mathbb{Z}[X]$ betsaat dat voldoet aan $P(a_i) = a_{i+1}$ voor $i \in \{1, 2, 3\}$, waar we definieren $a_4 = a_1$.*

Opgave 9. *Vind alle natuurlijke getallen n waarvoor een polynoom $P \in \mathbb{Z}[X]$ bestaat zo dat voor alle positieve delers $d \mid n$ geldt dat*
$$p(d) = \left(\frac{n}{d}\right)^2.$$

Opgave 10. *Zij $P(x)$ een polynoom met gehele coëfficiënten en zij m een geheel getal ongelijk aan 0. We definiëren de rij $a_1, a_2, \ldots$ door te nemen $a_1 = m$ en $a_{i+1} = P(a_i)$. Gegeven is dat alle a_i ongelijk zijn aan 0 en dat $a_i \mid a_{i+1}$ voor alle i.*

a) Stel dat alle a_i verschillend zijn. Bewijs dat $P(0) = 0$.

b) Stel nu dat $P(0) \neq 0$. Laat zien dat de rij $a_1, a_2, \ldots$ na verloop van tijd periodiek wordt met periode 1 of 2.

Opgave 11. *Laat P een polynoom zijn met gehele coëfficiënten zodat voor alle positieve gehele n geldt dat $P(n) > n$. Definieer de rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ van positieve gehele getallen recursief door $a_0 = 1$ en $a_{i+1} = P(a_i)$. Gegeven is dat voor elk natuurlijk getal N geldt dat een veelvoud van N in deze rij voorkomt. Bewijs dat $P(x) = x + 1$.*

Opgave 12. *Zij $P(x)$ een polynoom van graad $n > 1$ met gehele coëfficiënten en zij k een geheel getal ($k > 0$). Beschouw het polynoom*

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

waarin P precies k keer voorkomt. Bewijs dat er ten hoogste n gehele getallen t zijn zodanig dat $Q(t) = t$.