Week 15: Expliciete constructies en wat te doen met inverses

Ideeën voor deze week:

- Als er gevraagd wordt te laten zien dat er iets bestaat, dan is de gemakkelijkste manier om het juiste object te definiëren en vervolgens te bewijzen dat het aan alle eisen voldoet.
- In het bijzonder, als je moet bewijzen dat iets inverteerbaar is, geef dan een inverse!
- Als je met inverses werkt, dan is gebruik maken van de definitie eigenlijk het enige wat je kan. Het is dus altijd beter om iets als
$$A + B = C^{-1}$$
om te schrijven naar
$$AC + BC = I \quad \text{of} \quad CA + CB = I.$$
- Bedenk dat we dit ook doen bij bijvoorbeeld getaltheorie: een vergelijking als
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$
schrijven we liever als $n(x + y) = xy$. Wortels en breuken zijn namelijk gewoon naar en die werken we daarom meestal weg!
- Soms als je wilt bewijzen dat $p = 2^{n-1}q$, dan kan het handiger zijn om te bewijzen dat $2p = 2^n q$. Als n namelijk een prominente rol speelt in de opgave, dan zijn er voor 2^n vaak meer interpretaties dan voor 2^{n-1}. Eigenlijk kan je een minteken in de exponent altijd zien als delen en dat wil je vaak gewoon liever niet.

Voorbeeldopgave 1 *Zij R een (niet-noodzakelijk commutatieve) ring met 1. Bewijs dat als voor $a, b \in R$ geldt dat $1 - ab$ inverteerbaar is, ook $1 - ba$ inverteerbaar is.*

In commutatieve ringen is dit natuurlijk duidelijk. Hoe moeten we dit nou aanpakken voor algemene ringen? Laten we de inverse van $1 - ab$ even u noemen. Zouden we de inverse van $1 - ba$ kunnen uitdrukken in a, b en u?
Een truc die nu goed werkt is de volgende gelijkheid opmerken

$$(1 - ab)(1 + (ab) + (ab)^2 + (ab)^3 + \ldots) = 1.$$

Dit slaat natuurlijk helemaal nergens op, want oneindige sommen bestaan in het algemeen niet in ringen. Maar als we nu v schrijven voor de inverse van $1 - ba$, dan zien we

$$\begin{aligned} v &= 1 + (ba) + (ba)^2 + (ba)^3 + \ldots \\ &= 1 + ba + baba + bababa + \ldots \\ &= 1 + b(1 + ab + abab + \ldots)a \\ &= 1 + bua. \end{aligned}$$

Dit is natuurlijk geen bewijs, maar wie weet blijkt $1 + bua$ wel gewoon altijd een inverse te zijn voor $1 - ba$. Laten we dat eens proberen

$$\begin{aligned} (1 - ba)(1 + bua) &= 1 - ba + bua - babua \\ &= 1 - ba + bua - b(u - 1)a \\ &= 1 - ba + bua - bua + ba \\ &= 1. \end{aligned}$$

Hier hebben we gebruikt dat $(1 - ab)u = 1$, dus $abu = u - 1$.
We hebben dus nog eigenlijk iets veel sterkers laten zien: als $1 - ab$ een linksinverse u heeft, dan is $1 + bua$ een rechtsinverse voor $1 - ba$.

Opgaven

Opgave 1 *Zij N een nilpotente matrix. Bewijs dat $I - N$ inverteerbaar is.*

Opgave 2 *Gegeven is een geheel getal $n \geq 2$. Zij A_n de $n \times n$-matrix met enkel nullen op de diagonaal en enen elders. Bewijs dat de determinant van deze matrix ongelijk is aan 0.*

Opgave 3 (Vojtech Jarnik 2015) *Gegeven zijn twee reële 3×3-matrices A en B. Als we aannemen dat alle hieronder genoteerde inverses bestaan, bewijs dan dat*

$$A - \left(A^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1}\right)^{-1} = ABA.$$

Opgave 4 (IMC 1994) *a) Zij A een symmetrische, inverteerbare $n \times n$-matrix met positieve reële getallen als coëffciënten. Bewijs dat $z_n \leq n^2 - 2n$ waar z_n het aantal nullen in A^{-1} is.*

b) Hoeveel nullen staan er in de inverse van de volgende $n \times n$-matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

Opgave 5 (IMC 2015) *Zij $n \geq 2$ een geheel getal. Gegeven zijn twee inverteerbare reële $n \times n$-matrices A en B die voldoen aan*

$$A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}.$$

Bewijs dat $\det(A) = \det(B)$.
Geldt deze conclusie ook voor zulke matrices in $M_n(\mathbb{C})$?

Opgave 6 *Zij R een ring met eenheid en $x, y \in R$ twee elementen zo dat $1 - xy$ en $1 - yx$ inverteerbaar zijn. Bewijs dat*

$$(1 + x)(1 - yx)^{-1}(1 + y) = (1 + y)(1 - xy)^{-1}(1 + x).$$

Opgave 7 (IMC 2005) *Een deelruimte V van de lineaire ruimte $M_n(\mathbb{R})$ noemen we galzwart als voor alle $X, Y \in V$ geldt $\mathrm{Sp}(XY) = 0$. Bepaal het maximum van de dimensie van alle galzwarte deelruimten.*

Opgave 8 (Putnam 1983) *Zij p een oneven priemgetal en definieer*

$$F(n) = 1 + 2n + 3n^2 + \ldots + (p - 1)n^{p-2}.$$

Bewijs dat als a en b verschillende elementen uit $\{0, 1, \ldots, p - 1\}$ zijn, dat dan $F(a)$ en $F(b)$ verschillend zijn modulo p.

Opgave 9 *Zij $n \geq 3$ een positief geheel getal. Voor een $v = (v_1, v_2, \ldots v_n)$ met iedere v_i gelijk aan 0 of 1 definieren we $f(v)$ als het aantal even getallen in de rij*

$$v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3 + v_4, v_3 + v_4 + v_5, \ldots, v_{n-1} + v_n + v_1, v_n + v_1 + v_2.$$

Vind alle n waarvoor het volgende geldt: voor alle $0 \leq k \leq n$ zijn er precies $\binom{n}{k}$ van de 2^n vectoren v met $f(v) = k$.

Opgave 10 *Zij $\mathcal{F}$ de kleinste verzameling van rationale functies in twee variabelen die x en y bevat en gesloten is onder het nemen van verschillen en de operatie $f \mapsto \frac{1}{f}$, voor alle $f \in \mathcal{F}\backslash\{0\}$. Laat zien dat $\mathcal{F}$ de constante functies, ongelijk aan 0, niet bevat.*

Opgave 11 (LIMO 2013) *Definieer S_m als de verzameling van alle gehele getallen $n \geq 0$ waarvoor geldt, dat in de binaire ontwikkeling van n geen enkele macht 2^k met k een positief veelvoud van m voorkomt.*
Beschouw de machtreeks $w_m \in \mathbb{F}_2[[t]]$ gegeven door

$$w_m = \sum_{n \in S_m} t^n.$$

Toon aan, dat w_m een $(2^m - 1)$-ste-machtswortel is van $t + 1$.

Opgave 12 (Virginia Tech Regional Mathematics Contest 2013) *Gegeven zijn twee matrices*

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 8 & -9 & -7 \\ -7 & -7 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad Y = \begin{pmatrix} 9 & 8 & -9 \\ 8 & -7 & 7 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Definieer $A = Y^{-1} - X$ en $B = (X^{-1} + A^{-1})^{-1}$. We nemen hier aan dat zowel X, Y, A en $X^{-1} + A^{-1}$ inverteerbaar zijn.
Vind een matrix M zo dat

$$M^2 = XY - BY.$$

Opgave 13 (Putnam 1999) *Zij A de $n \times n$-matrix met*

$$A_{ij} = \cos \frac{2\pi(i + j)}{n}.$$

Vind de determinant van $I + A$.

Opgave 14 (Putnam 1989) *Definieer $a_n = 1$ als ieder blok van nullen in de binaire ontwikkeling van n een even lengte heeft, en $a_n = 0$ in de andere gevallen. Bekijk de machtreeks $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ over $\mathbb{F}_2$. Bewijs dat*

$$\alpha^3 + \alpha x + 1 = 0.$$

Opgave 15 (Putnam 1988) *Zij M_n de $(2n + 1) \times (2n + 1)$-matrix met*

$$(M_n)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } i = j, \\ 1 & \text{als } i - j \equiv 1, 2, \ldots, n \mod 2n + 1, \\ -1 & \text{als } i - j \equiv n + 1, n + 2, \ldots, 2n \mod 2n + 1. \end{cases}$$

Vind de rang van M_n.

Opgave 16 (IMC 2002) *Laat A een complexe $n \times n$-matrix zijn voor $n > 1$. Bewijs dat*

$$A\overline{A} = I_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists S \in GL_n(\mathbb{C}) \quad \text{such that} \quad A = S\overline{S}^{-1}.$$

Hier schrijven we $\overline{B} = (\overline{b_{ij}})$ als $B = (b_{ij})$.