Week 17: Combinatoriek II (set 2)

Deze set gaat over het ladeprincipe, invariantie en kleuringen. In set 1 staat meer uitleg. Een belangrijke opgave uit de vorige set is de volgende.

Voorbeeldopgave 1 *Gegeven zijn n gehele getallen. Bewijs dat er een niet-lege deelverzameling van deze getallen bestaat, waarvan de som deelbaar is door n.*

Als we deze gehele getallen even $a_1, \dots, a_n$ noemen, dan bekijken we $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2, \dots,$ en $s_n = a_1 + \ldots + a_n$. Dit zijn n getallen. Als er een $0 \mod n$ is zijn we klaar. Anders zijn er met het ladeprincipe twee congruent modulo n en nemen we het verschil.

Opgaven

Opgave 1 *Op elk vakje van een 9×9-bord zit een kever. Als er een fluitsignaal klinkt, kruipt elke kever naar een diagonaal aangrenzend vakje. Hierdoor kunnen sommige vakjes leeg worden (en in andere vakjes zitten meerdere kevers). Wat is het minimale aantal lege vakjes?*

Opgave 2 *Gegeven is een verzameling M van 1985 positieve gehele getallen, waarvan er geen een een priemfactor groter dan 23 heeft. Bewijs dat er in deze verzameling vier verschillende getallen zitten waarvan het meetkundig gemiddelde een geheel getal is.*

Opgave 3 *Van een $n \times n$-bord is een aantal vakjes ziek. Deze ziekte is erg besmettelijk. Als een vakje minstens twee zijden gemeen heeft met zieke vakjes, dan wordt dat vakje zelf ook ziek. Aan het eind van de epidemie blijkt elk vakje van het bord ziek te zijn. Hoeveel vakjes waren er aan het begin minstens ziek?*

Opgave 4 *Bekijk een rooster in het vlak met een pion op de oorsprong. We spelen een spel waarin in elke stap een pion verwijderd wordt en twee nieuwe pionen geplaatst worden op lege kruispunten die horizontaal of verticaal naast het oude kruispunt liggen. Bewijs dat er altijd een pion op afstand hooguit 5 van de oorsprong staat.*

Opgave 5 *Zij $P(S)$ de verzameling van deelverzameling van S met precies 2 elementen. De elementen van $P(\mathbb{N})$ worden of rood of blauw gekleurd. Bewijs dat er een oneindige deelverzameling $V \subseteq \mathbb{N}$ bestaat zo dat alle elementen van $P(V) \subseteq P(\mathbb{N})$ dezelfde kleur hebben.*

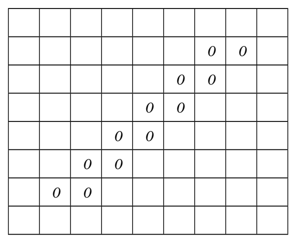
Opgave 6 *We beginnen met een viertal positieve gehele getallen en voeren het volgende algoritme uit. Als de getallen x, y, u en v zijn en $x > y$ dan vervangen we het viertal door $x - y, y, u + v$ en v. In het geval dat $x < y$ dan vervangen we het door $x, y - x, u$ en $u + v$. We herhalen deze stap telkens. Het algoritme stopt als $x = y$, dat in dat geval is $x = y$ gelijk is aan de grootste gemene deler van de oorspronkelijke x en y. Stel dat het oorspronkelijke viertal m, n, m, n was, bewijs dat het gemiddelde van u en v in de eindsituatie gelijk is aan het kleinste gemene veelvoud van m en n.*

Opgave 7 *Een schaker bereidt zich in de komende 77 dagen voor op een toernooi. Dat doet hij door iedere dag minstens een partij te spelen, maar in de gehele voorbereiding niet meer dan 132 partijen. Bewijs dat er een aantal opeenvolgende dagen is, waarop de schaker precies 21 partijen speelt.*

Opgave 8 *Gegeven is een $m \times n$-bord met op elk vakje een munt. In het begin liggen alle munten met kop boven. Bij elke stap kies je een munt met kop boven. Neem deze munt van het bord en draai al zijn buren om. Twee munten zijn buren als de vakjes waar ze op liggen met een zijde aan elkaar grenzen. Voor welke m en n is het mogelijk om alle munten van het bord te halen?*

Opgave 9 *Is het mogelijk om het standaard 8×8-schaakbord te snijden met 13 lijnen (niet door het midden van één van de vakjes), zo dat de middens van de 64 hokjes in aparte gebieden liggen?*

Opgave 10 *Wat is het maximale aantal niet-overlappende 2×1-dominostenen dat we kunnen plaatsen op het volgende 8×9-schaakbord, gegeven dat er al zes dominostenen geplaatst zijn zoals hieronder aangegeven?*



Opgave 11 *Gegeven zijn positieve gehele getallen $n_1 < n_2 < \ldots < n_{2000} < 10^{100}$. Bewijs dat we van de verzameling $\{n_1, \ldots, n_{2000}\}$ twee niet-lege disjuncte deelverzamelingen kunnen kiezen met hetzelfde aantal elementen, dezelfde som en dezelfde som van de kwadraten.*

Opgave 12 *Zij n een oneven positief geheel getal. We kleuren een $n \times n$-bord volgens een schaakbordpatroon zodat de hoekpunten zwart zijn. We noemen n* geweldig *als het mogelijk is om L-triomino's op het $n \times n$-bord te plaatsen op zo'n manier dat ze niet overlappen en dat alle zwarte vakjes bedekt worden. Bepaal welke getallen geweldig zijn en bepaal voor deze getallen het minimumaantal benodigde triomino's.*

Opgave 13 *Een trapblok bestaat uit zes kubusjes, drie op de onderste laag, twee op de middelste laag en een op de bovenste laag, op elkaar gestapeld in de vorm van een trap. Bepaal alle natuurlijke getallen n waarvoor je een kubus met zijde n kan bouwen van deze trapblokken.*

Opgave 14 *Zij $\mathcal{S}$ een eindige verzameling van ten minste twee punten in het vlak, waarvan er geen drie op één lijn liggen. Een* windmolen *is een proces dat begint met een lijn ℓ die door één punt P van $\mathcal{S}$ gaat. De lijn draait met de klok mee om het draaipunt P tot er voor het eerst een ander punt van $\mathcal{S}$ op deze lijn komt te liggen; we noemen dit punt Q en dit wordt het nieuwe draaipunt. We zeggen dat Q* een klap van de molen krijgt*. De lijn draait nu met de klok mee om Q, totdat opnieuw een punt van $\mathcal{S}$ een klap van de molen krijgt. De windmolen deelt zo oneindig veel klappen uit.*

Laat zien dat we een punt P van $\mathcal{S}$ en een lijn ℓ door P kunnen kiezen zodat er een windmolen ontstaat waarbij elk punt van $\mathcal{S}$ oneindig veel klappen van de molen krijgt.