Week 18: Reële analyse (set 2)

Continue functies hebben een hoop fijne eigenschappen die zeker niet gedeeld wordt met algemene functies. Deze week bekijken we de volgende eigenschappen.

Stelling 1 (Tussenwaardestelling) *Zij $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie. Als U samenhangend is, dan geldt dat ook voor het beeld. Oftewel als f twee waarden aanneemt dan neemt f ook alle waarden daartussen aan.*

Niet iedere functie $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neemt een maximum of een minimum aan op het domein. Als het domein echter uit een eindig aantal punten bestaat, dan gebeurt dit uiteraard wel. Verzamelingen die veel lijken op eindige verzamelingen zijn de compacte verzamelingen. Voor $\mathbb{R}$ zijn dat precies de begrensde gesloten verzamelingen.

Stelling 2 (De stelling van Weierstrass) *Zij $f : C \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue afbeelding met C compact. Dan neemt f op C zowel een maximum als een minimum aan.*

We hebben nu twee voorbeelden gezien van stellingen die iets zeggen over het bestaan van een punt waarin een functie een bijzondere waarde aanneemt. We zullen nu naar nog zo'n stelling kijken: de stelling van Rolle, ook wel bekend als de middelwaardestelling.

Stelling 3 (Stelling van Rolle) *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie die continu is op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b). Dan bestaat er een punt $c \in (a, b)$ met*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Een veel voorkomende variant is de situatie waarin $f(a) = f(b)$ en er dus een c bestaat waarin de afgeleide nul is.
Het lastigste bij deze stelling is het vinden van de functie waarop je de stelling moet toepassen. Vaak moet je zelf een functie construeren. We zullen in de opgaven wat mogelijkheden zien om uit een functie f de juiste functie g te construeren zo dat $g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$ precies het resultaat is dat we zoeken voor f. Indien we te maken hebben met een lineaire combinatie van f en f' moeten we vaak op zoek naar een functie h zo dat $hf' + h'f$ al erg lijkt op wat we willen.

Opgaven

Opgave 1 *Zij $f : [0, 1] \to [0, 1]$ een differentieerbare functie zo dat $|f'(x)| \neq 1$ voor alle $x \in [0, 1]$. Bewijs dat er unieke punten $\alpha, \beta \in [0, 1]$ bestaan zo dat $f(\alpha) = \alpha$ en $f(\beta) = 1 - \beta$.*

Opgave 2 *Zij $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ een continu functie die differentieerbaar is op $(0, 1)$ met $f(0) = 0 = f(1)$. Bewijs voor ieder van de onderstaande uitdrukkingen het bestaan van een c in $(0, 1)$ zo dat*

a) $f'(c) = 0$;

b) $f'(c) + f(c) = 0$;

c) $f'(c) + 2f(c) = 0$;

d) $f'(c) + kf(c) = 0$ *met k geheel;*

e) $f'(c) = f(c)$;

f) $f'(c) = f(c) \tan c$;

g) $2f'(c) = f(c) \tan c$;

h) $f'(c) + f(c) \tan c = 0$;

i) $f'(c) = f(c)\sin c$;

j) $f'(c) = f(c)\cos c$.

Opgave 3 *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *een driemaal differentieerbare functie met minstens vijf nulpunten. Bewijs dat* $f + 6f' + 12f'' + 8f'''$ *ten minste twee nulpunten heeft.*

Opgave 4 *Zij* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *een continu functie met* $f(0) = f(1)$. *Bewijs dat voor ieder natuurlijk getal* n *er een* $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ *bestaat met* $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.

Opgave 5 *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *een continue functie. Een punt* x *noemen we een schaduwpunt als er een punt* $y \in \mathbb{R}$ *bestaat met* $y > x$ *en* $f(y) > f(x)$. *Laat* $a < b$ *twee reële getallen zijn en neem aan dat*

- *alle punten in* $I = (a, b)$ *schaduwpunten zijn van* f;
- a *en* b *zijn geen schaduwpunten.*

Bewijs dat

a) $f(x) \leq f(b)$ *voor alle* $a < x < b$.

b) $f(a) = f(b)$.

Opgave 6 *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *een tweemaal differentieerbare functie die voldoet aan* $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ *en*

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0$$

voor alle $x \in [0, \infty)$. *Bewijs dat voor alle* $x \in [0, \infty)$ *geldt*

$$f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}.$$

Opgave 7 *Zij* f *een reëelwaardige, continue functie op* $[0,1]$ *die nergens monotoon is. Bewijs dat de lokale minima dicht in* $[0,1]$ *liggen.*

Opgave 8 *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *een tweemaal differentieerbare functie. Neem aan dat* $f(0) = 0$. *Bewijs dat er een* $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *bestaat die voldoet aan*

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2\tan^2 \xi).$$

Opgave 9 *Zij* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *een continue functie die tweemaal differentieerbaar is op* (a, b). *Gegeven een* $x_0 \in (a, b)$, *bewijs dat er een* $\xi \in (a, b)$ *bestaat met*

$$\frac{\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x_0 - b} = \frac{1}{2}f''(\xi).$$