Week 21: CACTUS-oefenset

Praktische zaken

Komende vrijdag vindt het CACTUS plaats op de Radboud Universiteit Nijmegen. Als je je nog niet hebt ingeschreven, doe dat dan onmiddellijk op de volgende website:

https://sites.google.com/site/cactusfnwi/aanmelden.

De auteurs van dit document raden jullie aan de trein van 10:06 te nemen vanaf Leiden Centraal, spoor 5b, richting Schiphol.

Algemene tips

Een van de C's in het CACTUS staat voor combinatoriek. Het is niet af te raden om de setjes over inductie, binomiaalcoëfficiënten, kleine gevallen, het ladeprincipe, kleuringen, invariantie en bijecties nog eens door te nemen. Alles zou voor kunnen komen.

Weet je even niet wat je moet doen? Ga kleine gevallen proberen? Je kunt iets niet in het algemeen tellen als je het zelfs in een speciaal geval niet kan.

Opgaven

Opgave 1 (LIMO 2011-1) *Hoeveel oplossingen van $x_1 + \ldots + x_r = n$ zijn er zodat precies k van de x_i gelijk aan nul zijn?*

Opgave 2 *Zij G een eindige graaf. Laat zien dat er een even aantal punten is met oneven graad.*

Opgave 3 (LIMO 2009-5) *Bereken*

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(-1)^m \cdot 2^{2\ell+2m-n} \cdot n!}{\ell! \cdot m! \cdot (k-m)! \cdot (n-k-\ell)!}.$$

Opgave 4 *Een vriendengroep van mensen corpsballen heeft nieuwe truien besteld; drie mensen willen een S, een wil een M en de overige drie een L. De truien worden op dinsdagavond onder etenstijd bezorgd en de studenten pakken willekeurig een trui uit de doos. Wat is de verwachtingswaarde voor het aantal mensen met de juiste maat trui?*

Opgave 5 (MOAWOA ?) *Voor een natuurlijk getal n is $\pi(n)$ het aantal verzamelingen van natuurlijke getallen die voldoen aan de eis dat de som van de elementen gelijk is aan n. Verder is $\pi_2(n)$ het aantal van deze verzamelingen die in ieder geval een tweemacht bevatten. Bewijs dat $\pi_2(n+1) = \pi(n)$. In deze opgave wordt 1 gezien als een tweemacht.*

Opgave 6 *Bepaal*

$$\binom{n}{0}\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-2}\binom{n}{n}$$

voor alle gehele $n \geq 2$.

Opgave 7 (LIMO 2013-11) *Een permutatie heet irreducibel als de beperking tot de eerste zoveel elementen geen permutatie geeft. Laat P_n het aantal irreducibele permutaties zijn van S_n. Bewijs dat $P_n = n! + \sum_{i=1}^{n-1} P_i \cdot (n-i)!$ en dat $P_n/n! \to 1$ als $n \to \infty$.*

Opgave 8 (LIMO 2014-7) *Een bijna-bovengrens voor een collectie functies $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is een functie zodat elke elke functie in de collectie bijna overal kleiner is. Laat zien dat een collectie een bijna-bovengrens heeft desda hij aftelbaar is.*

Opgave 9 (IMO 2002-1) *S is de verzameling van alle (h,k) met h,k niet-negatief geheel zodat $h+k<n$. Elk element van S is rood of blauw gekleurd op zo'n manier dat als (h,k) rood is en $h' \leqslant h$, $k' \leqslant k$, dan is (h',k') ook rood. Een type 1 deelverzameling van S heeft n blauwe elementen met verschillende eerste coördinaten en een type 2 deelverzameling van S heeft n blauwe elementen met verschillende tweede coöördinaten. Bewijs dat er even veel type 1 als type 2 deelverzamelingen zijn.*

Opgave 10 *Zij $n \geq 2$ een natuurlijk getal. Bekijk een willekeurige permutatie $\sigma \in S_n$ en schrijf deze in disjuncte-cykelnotatie. Wat is de kans dat 1 en 2 in dezelfde cykel zitten? Als $k \in \{1,\ldots,n\}$, wat is dan de kans dat 1 in een k-cykel zit?*

Opgave 11 (IMC 2002-2.2) *Tweehonderd studenten doen mee aan een wiskundewedstrijd. Ze krijgen zes problemen om op te lossen. Het is bekend dat elk problem is opgelost door ten minste 120 deelnemers. Bewijs dat er two deelnemers zijn zodat elk probleem is opgelost door ten minste een van deze twee studenten.*

Opgave 12 (LIMO 2008-5) *Bestaat er een deelverzameling van $P(\mathbb{N})$, lineair geordend door inclusie, van cardinaliteit $|\mathbb{R}|$?*

Opgave 13 *Gegeven zijn n munten op een rij. We mogen hier munten opleggen, zolang iedere munt maar horziontaal ligt en in het midden ligt van de twee rakende munten daaronder. Bewijs dat we dat op C_n manieren kunnen doen.*

Opgave 14 (IMO 2008-5) *Zijn $k \geqslant n$ positief geheel met $k-n$ even. We beschouwen $2n$ lampen, genummerd van 1 tot en met $2n$ die allemaal aan of uit staan. Aan het begin zijn alle lampen uit. In elke stap wordt een lamp aan of juist uit gezet. Zij N het aantal opeenvolgingen van k stappen die resulteren in een staat waarin de eerste n lampen aan zijn en de laatste n lampen uit. Zij M het aantal opeenvolgingen van k stappen die resulteren in een staat waarin de eerste n lampen aan staan en de laatste n lampen nooit aangezet zijn. Bepaal N/M.*

Opgave 15 *Zij n een positief getal. Bewijs dat het aantal partities van n gelijk is aan het aantal partities van $2n$ in n delen.*

Opgave 16 *Laat zien dat het aantal manieren om een trapfiguur met een basis van n blokjes (n eenheidsblokjes met daarop n blokjes afgezien van de meest rechter, daarop weer $n-1$ blokjes afgezien van de meest rechter, enzovoorts) op te delen in n rechthoeken gelijk is aan C_n.*

Opgave 17 *In een straat zijn n parkeerplekken achter elkaar. Er komen n auto's achtereenvolgend de straat binnen rijden en iedere automobilist heeft een voorkeur voor één van deze n plekken. De eerste bestuurder parkeert op zijn favoriete plek. De tweede parkeert ook op zijn favoriete plek* *tenzij deze bezet is en dan pakt hij de eerstvolgende vrije parkeervak. Als zo'n plek niet bestaat dan rijdt hij boos de straat uit. Dit herhaalt zich nu met de automobilisten* 3 *tot en met* n. *De bestuurders kunnen op* n^n *manieren hun voorkeursplek kiezen. Op hoeveel manieren kunnen de bestuurders een voorkeursplek hebben zo dat geen van hen boos de straat verlaat?*

Opgave 18 (IMO 2001-3) *Eenentwintig meisjes en eenentwintig jongens doen mee aan een wiskundewedstrijd. Het blijkt dat elke deelnemer minstens zes problemen heeft opgelost en dat voor elk paar van een jongen en een meisje er ten minste een probleem is opgelost door zowel de jongen als het meisje. Bewijs dat er een probleem is dat opgelost is door ten minste drie meisjes en drie jongens.*

Opgave 19 (IMC 2013) *Bekijk een cirkelvormige ketting met 2013 kralen. Elke kraal kan wit of groen gekleurd worden. Een kleuring van de ketting heet* goed*, als van elke 21 opeenvolgende kralen er ten minste een groen is. Bewijs dat het aantal goede kleuringen van de ketting oneven is. (Twee kleuringen die verschillen op sommige kralen maar verkregen kunnen worden uit elkaar door een rotatie of spiegeling worden als verschillend gezien.)*