Week 23: Analyse-mix

Opgave 1 *Vind alle continue functies* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *die voldoen aan* $f(0) = 1$ *en*

$$f(2x) - f(x) = x,$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 2 *Zij* $a \in (0,1)$ *een reëel getal en* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *een functie die voldoet aan*

(i) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$;

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(ax)}{x} = 0$.

Bewijs dat $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Opgave 3 *Laat* f *en* g *functies zijn die in een omgeving van een punt* $a \in \mathbb{R}$ *in ieder geval* n*-voudig continu differentieerbaar zijn die bovendien voldoen aan* $f(a) = \alpha = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(a) = g^{(n-1)}(a)$ *en* $f^{(n)}(a) \neq g^{(n)}(a)$. *Druk de limiet*

$$\lim_{x\to a} \frac{e^{f(x)} - e^{g(x)}}{f(x) - g(x)}$$

uit in α.

Opgave 4 *Zij* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *een continue functie. Bewijs dat*

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx.$$

Opgave 5 *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tweevoudig differentieerbare functie met positieve tweede afgeleide. Bewijs dat*

$$f(x + f'(x)) \geq f(x)$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 6 *Gegeven zijn twee rijtjes van positieve reële getallen* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *en* $b_1, b_2, \ldots, b_l$ *die voldoen aan*

$$\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{b_1} + \sqrt[n]{b_2} + \ldots + \sqrt[n]{b_l}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$. *Bewijs dat* $k = l$ *en dat* $a_1 a_2 \ldots a_k = b_1 b_2 \ldots b_k$.

Opgave 7 (LIMO 2009) *Laat* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *een continu differentieerbare functie zijn met de eigenschap dat er een* $c > 0$ *is zodat*

$$|xf(x) - yf(y)| \leq c|x - y|$$

voor iedere $x, y \in \mathbb{R}$. *Bewijs dat* f *Lipschitz continu is. Dat wil zeggen: Laat zien dat er een* $\tilde{c} > 0$ *bestaat zodat*

$$|f(x) - f(y)| \leq \tilde{c}|x - y|$$

voor iedere $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 8 *Bewijs dat als* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *een differentieerbare functie is met de eigenschap dat* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *bestaat en eindig is. Als de limiet* $\lim_{x\to\infty} xf'(x)$ *eveneens bestaat, bewijs dan dat deze gelijk is aan* 0.

Opgave 9 *Beschouw de polynomen*

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \quad Q(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k - 1} x^k$$

over de reële getallen van graad $n \geq 1$. *Gegeven is dat* 1 *en* 2^{n+1} *nulpunten zijn van* Q. *Bewijs dat* P *een positief nulpunt heeft dat kleiner is dan* 2^n.

Opgave 10 *Gegeven zijn positieve reële getallen* a *en* b. *Bepaal*

$$\int_a^b \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{b}{x}}}{x}\, dx.$$

Opgave 11 *Laat* X *en* Y *twee* 2×2*-matrices zijn over* $\mathbb{C}$.

a) Neem aan dat X *inverteerbaar is. Bewijs de volgende identiteit*

$$\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y).$$

b) Bewijs de ongelijkheid voor alle complexe 2×2*-matrices.*

Opgave 12 *Vind alle continue functies* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *die voldoen aan*

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f(x^2)^2\, dx.$$

Opgave 13 *Laat* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *een continue functie zijn zo dat*

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Bewijs dat er een $x_0 \in (0, 1)$ *bestaat met*

$$\frac{1}{1 + x_0} < f(x_0) < 2x_0.$$