Week 16: tweede-, derde- en vierdegraadsidentiteiten

Vaak is het bij een opgave handig, of zelfs het idee achter een oplossing, om een algebraïsche identiteit te gebruiken. Dit kan bij allerlei soorten opgaven een rol spelen, daarom zullen we er deze week een aantal nuttige identiteiten behandelen. Door de veelzijdigheid van de identiteiten zijn we onnauwkeurig in het formuleren in welke context ze precies waar zijn. Vaak is de enige voorwaarde dat we in een commutatieve ring leven. Om te beginnen:

Stelling 1 (Een tweede-graadsidentiteit)**.** *Er geldt*

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y).$$

Als je kwadraten ziet, kan je altijd proberen om te zorgen dat je ergens verschillen van kwadraten krijgt, zo dat je kan ontbinden.

Een andere nuttige identiteit is de volgende:

Stelling 2 (Een derde-graadsidentiteit)**.** *Als geldt dat $a+b+c=0$, dan geldt er*

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Bewijs. Een snel bewijs is gebaseerd op de identiteit

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \\ &= (a+b+c)(a+b\zeta_3+c\zeta_3^2)(a+b\zeta_3^2+c\zeta_3) \end{aligned}$$

welke op zichzelf al interessant is. De vraag is natuurlijk hoe deze te onthouden en daarvoor hebben we volgende mooie manier.

Merk op dat

$$a^3+b^3+c^3-3abc = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a+b+c & b & c \\ c+a+b & a & b \\ b+c+a & c & a \end{pmatrix} = (a+b+c)\det\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}.$$

Dus als $a+b+c=0$ geldt er inderdaad $a^3+b^3+c^3=3abc$ en die kwadratische factor hierboven kunnen we vinden door die laatste determinant uit te werken. □

Vervolgens hebben we nog de volgende identiteit van graad vier.

Stelling 3 (Een vierde-graadsidentiteit)**.** *Zij m vast. Dan zijn de getallen van de vorm*

$$a^2 + mb^2$$

gesloten onder vermenigvuldiging en wel door de volgende identiteit

$$(a^2+mb^2)(c^2+md^2) = (ac-mbd)^2 + m(ad+bc)^2.$$

Bewijs. De identiteit is snel gecontroleerd en daarmee is het bewijs rond, maar ook deze identiteit kunnen we inzichtelijk afleiden met lineaire algebra:
merk op dat a^2+mb^2 precies de determinant is van de matrix

$$\begin{pmatrix} a & b\sqrt{-m} \\ b\sqrt{-m} & a \end{pmatrix}.$$

Als we laten zien dat het product van twee van dit soort matrices weer van de vorm zijn, zijn we klaar. En inderdaad

$$\begin{pmatrix} a & b\sqrt{-m} \\ b\sqrt{-m} & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d\sqrt{-m} \\ c\sqrt{-m} & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bdm & (ad+bc)\sqrt{-m} \\ (ad+bc)\sqrt{-m} & ac-bdm \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Deze identiteit komt het vaakst voor met $m = 1$:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

krijgen, welke precies overeen komt met het feit dat het product van de norm van twee complexe getallen gelijk is aan de norm van het product van die complexe getallen:

$$|a+bi| \cdot |c+di| = |(a+bi)(c+di)|.$$

Dit geeft ook een manier om deze identiteit te onthouden, je hoeft enkel de m'etjes op de juiste plek te plaatsen.

Verder hebben we natuurlijk nog wel algemene identiteiten van hogere macht, zoals

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

In het bijzonder kunnen we de eerste identiteit dus generaliseren en zijn verschillen van n-de machten altijd te factoriseren. Voor oneven n vinden we analoog dat we sommen van n-de machten kunnen ontbinden. Echter bij sommen van $2k$-de machten wordt dat dus altijd lastig. Nu kan dat soms met bovenstaande vierde-graadsidentiteit, maar soms hebben we ook iets aan de volgende identiteit.

Stelling 4 (De identiteit van Sophie-Germain)**.** *De uitdrukking*

$$a^4 + 4b^4$$

valt te ontbinden tot

$$(a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2).$$

Bewijs. Weer bevat het bewijs een manier om deze identiteit te onthouden: we completeren het kwadraat $(a^2+2b^2)^2$ en halen de kruisterm $4a^2b^2$ er ook direct af

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2+2b^2)^2 - 4a^2b^2$$

en dit is weer het verschil van twee kwadraten

$$(a^2+2b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2-2ab+2b^2)(a^2+2ab+2b^2). \qquad \square$$

Opgaven

Opgave 1. *Vind alle oplossingen* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2_{>0}$ *met* $x \neq y$ *voor*

$$x^2 + 2016x = y^2 + 2016y.$$

Opgave 2. *Wat is de grootste priemdeler van*

$$25^2 + 72^2?$$

Opgave 3. *Bepaal alle positieve gehele* n *waarvoor* $2^{n+1} - n^2$ *priem is.*

Opgave 4. *Op een tennistoernooi spelen* $n \geq 1$ *spelers. Ieder paar spelers speelt precies één keer tegen elkaar. Zij* w_i *het aantal keer dat speler* i *wint en* v_i *het aantal keer dat speler* i *verliest. Bewijs dat*

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2.$$

Opgave 5. *Wat is de kleinste* n *waarvoor* $3^n - 1$ *deelbaar is door* 2^{2016}*?*

Opgave 6. *Bereken*

$$\frac{(10^4 + 324)(22^4 + 324)(34^4 + 324)(46^4 + 324)(58^4 + 324)}{(4^4 + 324)(16^4 + 324)(28^4 + 324)(40^4 + 324)(52^4 + 324)}.$$

Opgave 7. *Zij* p *een priemgetal. Bewijs dat*

(a) -4 *een vierdemacht is modulo* p *indien* $p \equiv 1 \mod 4$.

(b) 4 *een vierdemacht is modulo* p *indien* $p \equiv 3 \mod 4$.

Opgave 8. *Vind alle natuurlijke* n *waarvoor* $n^4 + 4^n$ *een priemgetal is.*

Opgave 9. *Zij* n *een positief geheel getal. Bewijs dat* $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ *minstens* n *verschillende priemfactoren heeft.*

Opgave 10. *Laat* A *en* B *twee* $n \times n$*-matrices zijn die voldoen aan* $3AB = A^3 + B^3 = 3BA$*. Bewijs dat* $A + B + I$ *inverteerbaar is.*

Opgave 11. *Bepaal het kleinste positieve reële getal* k *zo dat voor alle reële* a*,* b*,* c *en* d *geldt dat*

$$2(ab + bc + cd + da + ac + bd) - k \leq$$

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} + \sqrt{(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)} + \sqrt{(c^2+1)(d^2+1)(a^2+1)} + \sqrt{(d^2+1)(a^2+1)(b^2+1)}.$$

Opgave 12. *Laat* a, b, c *rationale getallen zijn zo dat*

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0.$$

Bewijs dat $a = b = c = 0$.

Opgave 13. *Zij* P *een polynoom met reële coëfficiënten dat voldoet aan* $P(x) \geq 0$ *voor alle* $x \in \mathbb{R}$*. Bewijs dat er polynomen* $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ *bestaan zo dat*

$$P(X) = Q(X)^2 + R(X)^2.$$

Opgave 14. *We definieren voor iedere* $i \in \{0, 1, 2\}$ *de machtreeks*

$$a_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+i}}{(3n+i)!}.$$

Bewijs dat $a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 - 3a_0a_1a_2 = 1$.

Opgave 15. *Zij α een complexe (2^n+1)-demachts eenheidswortel met $n \geq 1$ geheel. Bewijs dat er polynomen p en q bestaan met gehele coëfficiënten, zo dat $p(\alpha)^2 + q(\alpha)^2 = -1$.*

Opgave 16. *Laat zien dat er oneindig veel oplossingen zijn in $\mathbb{Z}^3$ voor $(x^2+x+1)(y^2+y+1) = z^4+z^2+1$.*

Opgave 17. *Zij R een commutatieve ring. Laat zien dat de verzameling van de getallen van de vorm $a^3+b^3+c^3-3abc$ met a, b en c in R gesloten is onder vermenigvuldiging.*

Opgave 18. *Een rij $(x_n)_{n\geq 1}$ van verschillende getallen, ligt dicht in $(0,1)$. De getallen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ delen het interval $[0,1]$ op in n delen en x_n ligt in een van deze delen. Dit deel wordt door x_n opgesplits in twee intervallen van lengte a_n en b_n. Bereken*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n (a_n + b_n).$$

Opgave 19. *Bereken*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \log\left(1+\frac{1}{2n}\right) \cdot \log\left(1+\frac{1}{2n+1}\right).$$