Opgaven week 26: recursie set II

Opgave 1. *Bewijs dat de rij van Fibonacci periodiek is modulo* 5 *met periode* 20*. Het is verboden om expliciet te bereken dat* $F_{20} \equiv F_0 \mod 5$ *en* $F_{21} \equiv F_1 \mod 5$.

Opgave 2. *De rij* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *van gehele getallen is gegeven door*

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_1 = 1, \\ a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n & \textit{vor alle } n \geq 0. \end{cases}$$

Bewijs dat $a_p \equiv 1 \mod p$ *voor alle priemgetallen* p.

Opgave 3. *Zij* m *het kleinste gehele getal groter dan* $(1+\sqrt{3})^{2n}$*. Laat zien dat* m *deelbaar is door* 2^{n+1}.

Opgave 4. *Bewijs dat*

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

geheel is voor alle paren natuurlijke getallen m *en* n.

Opgave 5. *Vind alle functies* $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *zo dat*

$$f(f(f(x))) + 4f(f(x)) + f(x) = 6x$$

voor alle $x \in (0, \infty)$.

Opgave 6. *Zij* $n \geq 1$ *een geheel getal. In dorp* X *wonen* n *meisjes en* n *jongens; elk meisje hier kent elke jongen. In dorp* Y *wonen* n *meisjes,* $g_1, g_2, \ldots, g_n$*, en* $2n-1$ *jongens,* $b_1, b_2, \ldots, b_{2n-1}$*. Voor* $i = 1, 2, \ldots, n$ *geldt dat meisje* g_i *jongens* $b_1, b_2, \ldots, b_{2i-1}$ *kent en geen andere jongens. Zij* r *een geheel getal met* $1 \leq r \leq n$*. In elk van de dorpen wordt een feest gehouden waarbij* r *meisjes uit het betreffende dorp en* r *jongens uit hetzelfde dorp geacht worden met elkaar te dansen in* r *dansparen. Echter, elk meisje wil alleen dansen met een jongen die ze kent. Noem* $X(r)$ *het aantal manieren waarop we* r *dansparen kunnen kiezen in dorp* X*; noem* $Y(r)$ *het aantal manieren waarop we* r *dansparen kunnen kiezen in dorp* Y*.*
Bewijs dat $X(r) = Y(r)$ *voor* $r = 1, 2, \ldots, n$.

Opgave 7. *Wat is de honderste decimaal achter de komma van*

$$(1+\sqrt{2})^{2010}?$$

Opgave 8. *Gegeven zijn* $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ *en voor* $n \geq 4$ *definieren we*

$$a_n = \frac{1 + a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-3}}.$$

Bewijs dat a_n *geheel is voor alle natuurlijke* n.

Opgave 9. *Zij* $k > 1$ *een natuurlijk getal en definieer* $m = 4k^2 - 5$*. Bewijs dat er gehele* $a, b > 0$ *zijn, zodat in de rij gegeven door* $F_0 = a$*,* $F_1 = b$*,* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ *alleen termen voorkomen die copriem zijn met* m.

Opgave 10. *Bekijk de rij* $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *gedefinieerd door*

$$x_i = \begin{cases} 2^i, & \textit{als } 0 \leq i \leq 2014 \\ \sum_{j=1}^{2015} x_{i-j}, & \textit{als } i \geq 2015. \end{cases}$$

Vind de maximale k*, zo dat er* k *opeenvolgende getallen in deze rij zijn die deelbaar zijn door* 2015.

Opgave 11. *Zij* $(x_n)n \geq 0$ *een rij van reële getallen ongelijk aan nul, zo dat* $x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1} = 1$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$*. Bewijs dat er een reëel getal a bestaat zo dat* $x_{n+1} = ax_n - x_{n-1}$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$.