Week 28: reeksen (set 2)

- Een reeks is een speciaal soort rij, dus: denk altijd eerst na over convergentie! In het bijzonder: monotone, begrensde rijen convergeren.
- Voor reeksen zijn meer convergentietesten: absolute convergentie impliceert convergentie, afschatten met absoluut convergente rij, ratiotest, integraaltest, worteltest, enzovoorts.
- Let op bij het verwisselen van oneindige sommen (en integralen)! Als alles absoluut convergeert gaat het eigenlijk altijd goed.
- Als je daadwerkelijk een limiet moet bepalen, reken eerst een aantal termen uit en vorm een vermoeden. Bekijk ook het verschil van de partiële sommen met je vermoeden. Dit geldt uiteraard ook voor algemene rijen.
- Het kan vaak helpen om breuken te splitsen.
- Soms krijg je een mooie telescoopreeks. Let wel op ook dan de partiële sommen convergeren. Vaak is in deze gevallen het verschil van de partiële sommen met de limiet erg mooi!
- Herken machtreeksen geëvalueerd in een specifiek punt! De volgende machtreeksen moet je echt weten, de rest kan je afleiden:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{voor} \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \text{voor} \qquad |x| < 1;$$

  in het bijzonder

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \text{voor} \qquad |x| < 1.$$

  Bijvoorbeeld vinden we door te integreren dat

$$\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \qquad \text{voor} \qquad |x| < 1.$$

- Je mag natuurlijk niet alles invullen op een machtreeks. Stel bijvoorbeeld dat een formele machtreeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

  absoluut convergeert voor $|x| < r$, dan geeft dit een continue functie $f(x)$ op $(-r, r)$. We kunnen niet zomaar $\pm r$ invullen. Gelukkig is er de volgende stelling:

  Stelling 1 (Stelling van Abel) *In de situatie als hierboven: als de formele machtreeks convergeert voor $x = r$ met limiet l, dan geldt*

$$l = \lim_{x \uparrow r} f(x).$$

  Oftewel, als de machtreeks convergeert op de rand, dan is de limiet wat je verwacht.

- Bedenk dat een voorkomen van de extra index in de teller of nummer kan wijzen op het differentiëren of integreren van een bekende machtreeksontwikkeling.

- Zijn de termen van je reeks precies de s-de termen met $s \equiv a \mod m$ van een bekende machtreeks, gebruik complexe m-de-machtseenheidswortels. Ga wel na of de machtreeks convergeert op de eenheidscirkel.

Bekijken deze strategie op de volgende opgave, die we in set 1 al op meerdere manieren hebben oplossen. We schetsen hier een oplossing die lijkt op het schieten op een mug met een kanon, maar wel nog een andere techniek laat zien.

Voorbeeldopgave 1 *Bepaal*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Merk op dat de reeks enkel positieve termen heeft en begrensd is door bijvoorbeeld

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

voor $\alpha = 2$. Aangezien we weten dat zulke reeksen convergeren voor $\alpha > 1$ (kies je favoriete convergentietest) convergeert de reeks in de opgave ook.

We kunnen de som zien als de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{12} + \dots$$

geëvalueerd in $x = 1$. Nu lijkt $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ heel erg op een tweemaal geïntegreerde vorm van x^{n-1} dus we verschuiven de machten naar

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \dots$$

Dit is dus de machtreeks verkregen door

$$\frac{1}{1-x}$$

tweemaal te integeren. Dat is dus een integraal van

$$-\log(1-x) + C$$

en dat levert

$$(1-x)\log(1-x) - (1-x) + Cx + D.$$

Nu moeten we C en D bepalen, maar we weten $f(0) = D - 1$ en $f'(0) = C$. Dus $C = 0$ en $D = 1$ en we vinden dat

$$f(x) = (1-x)\log(1-x) + x \quad \text{voor} \quad |x| < 1$$

aangezien dat ook het convergentiegebied voor $\frac{1}{x-1}$ is. We weten gelukkig al dat de reeks convergeert voor $x = 1$ en dus volgt met de stelling van Abel dat de limiet van de reeks gelijk is aan

$$f(1) = 1.$$

Opgaven

Opgave 1 *Wat is de limiet van*

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\ldots?$$

Opgave 2 *Bereken*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^4+n^2+1}.$$

Opgave 3 *Bepaal*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}.$$

Opgave 4 *Bepaal*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right).$$

Opgave 5 *Vind een rationale functie $f(x)$ zo dat voor alle reële x met $|x|<1$ geldt dat*

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\ldots$$

convergeert naar $f(x)$.

Opgave 6 *Bepaal*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}.$$

Opgave 7 *Bereken de limiet*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(9n^2-1)}.$$

Opgave 8 *Bereken*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Opgave 9 *Zij k een positief geheel getal. Bereken*

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=1}^{\infty}\frac{1}{n_1n_2\ldots n_k(n_1+n_2+\ldots+n_k+1)}.$$

Opgave 10 *Bereken*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{arccot}(n^2+n+1)$$

waar $\operatorname{arccot} t$ voor $t\geq 0$ gedefinieerd is als de unieke $\theta\in(0,\frac{\pi}{2}]$ met $\cot\theta=t$.

Opgave 11 *Bepaal de waarde van*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right).$$