Week 3: Getaltheorie I (set 2)

Deze set gaat over modulorekenen. Nuttige stellingen om in gedachten te houden zijn: Euler-Fermat, Wilson en de Chinese reststelling.

Opgaven

Opgave 1. *Laat zien dat* $5^n \cdot (5^n + 1) - 6^n \cdot (3^n + 2^n)$ *deelbaar is door 91 voor alle* $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 2. *Zij* n *het getal* $2015^5 + 2035^4 + 1$. *Vind de grootste deler van* n *die kleiner is dan* n.

Opgave 3. *Bekijk de rij* $(a_n)_n$ *met* $a_n = n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$. *Vind de grootste gemene deler van de* a_n.

Opgave 4. *Bewijs dat er geen tweemacht is die eindigt op 2012 (in de decimale schrijfwijze).*

Opgave 5. *Vind alle gehele* k *en* l *zodat* $k^2 = 2^l + 3$.

Opgave 6. *Bepaal alle paren* (x, y) *van natuurlijke getallen zodat*

$$1! + 2! + \ldots + x! = y^2.$$

Opgave 7. *Bepaal alle paren natuurlijke getallen* (a, b) *zodat* $a^2 + 2b^2 = 2015$.

Opgave 8. *Vind alle paren gehele getallen* (m, n) *zodat* $3n^2 + 3n + 7 = m^3$.

Opgave 9. *Zij* n *een natuurlijk getal. Bewijs dat er* n *opeenvolgende getalllen bestaan die geen priemmacht zijn.*

Opgave 10. *Stel dat* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *en* $\{b_1, \ldots, b_n\}$ *verzamelingen representanten zijn voor* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *en dat* $\{a_1 b_1, \ldots, a_n b_n\}$ *dat ook is. Bewijs dat* $n \in \{1, 2\}$.

Opgave 11. *Zijn* m *en* n *natuurlijke getallen. Laat zien dat* $4mn - m - n$ *nooit een kwadraat is.*