Week 30: Complexe getallen en goniometrie

Het loont vaak om identiteiten te bekijken met behulp van complexe getallen, in het bijzonder als er goniometrische formules van pas komen. De volgende formule is best wel bekend.

Stelling 1 (Euler)

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha.$$

Vergeet ook niet dat

$$\mathrm{Re}(z) = (z+\overline{z})/2, \quad \mathrm{Im}(z) = (z-\overline{z})/(2i) \quad \text{en} \quad |z|^2 = z\overline{z}.$$

Opgaven

Opgave 1 *Vind/herleid de bekende formules voor* $\cos(\alpha+\beta)$ *en* $\sin(\alpha+\beta)$ *af met complexe getallen.*

Opgave 2 *Stel dat* $z \neq -1$ *op de eenheidscirkel ligt. Laat zien dat* $\frac{z}{(z+1)^2}$ *reëel is.*

Opgave 3 *Laat zien dat*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{2^n} = \frac{4-2\cos\theta}{5-4\cos\theta}.$$

Opgave 4 *Vind in de stijl van de vorige opgave een eindige* gesloten *uitdrukking voor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!}.$$

Opgave 5 *Laat zien dat* $\cos(\pi/2016)$ *irrationaal is.*

Opgave 6 *Stel dat* $f \in \mathbb{R}[x]$ *een polynoom is zodat* $f(x) \geqslant 0$ *voor alle* $x \in \mathbb{R}$*. Laat zien dat er* $g, h \in \mathbb{R}[x]$ *bestaan zodat* $f = g^2 + h^2$*.*

Opgave 7 *Bepaal*

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n).$$

Opgave 8 (Putnam 1989-A3) *Stel dat* $z \in \mathbb{C}$ *voldoet aan*

$$11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0.$$

Laat zien dat $|z| = 1$*.*

Opgave 9 *Bepaal*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{x}{2^n}\right).$$

Opgave 10 *Stel dat* a, b, u *en* v *reëel zijn met* $av - bu = 1$*. Laat zien dat* $a^2+b^2+u^2+v^2+au+bv \geqslant \sqrt{3}$. Hint: beschouw $a - bi$ en $u + vi$.

Opgave 11 (Putnam 1991-B2) *Zijn* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *niet-constante differentieerbare functies die voldoen aan*

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y), \quad g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$$

en $f'(0) = 0$. *Laat zien dat* $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ *voor alle* x.

Opgave 12 (variant op MOAWOA 2016-4) *Beschouw rijen* $a_0, a_1, \ldots$ *die voldoen aan*

$$a_n = 2a_{n-1}^2 - 1$$

voor alle positieve n. *Hoeveel van zulke rijen bestaan er met* $a_{2016} = a_0$*?*