

Week 4: Ongelijkheden (set 1)

Deze week gaat over ongelijkheden. De belangrijkste ongelijkheid is de volgende.

Stelling 1 Voor alle reële x geldt dat $x^2 \geq 0$. Er geldt uiteraard precies gelijkheid als $x = 0$.

Deze ongelijkheid ligt aan de grondslag van veel andere ongelijkheden, waarvan de volgende een van de meest nuttige en veelzijdige is.

Stelling 2 (De ongelijkheid van het rekenkundig en het meetkundig gemiddelde) Laat a_1, \dots, a_n niet-negatieve reële getallen zijn. Dan geldt

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

en gelijkheid treedt op enkel en alleen als $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Als de a_i 'tjes positief zijn, dan kunnen we deze ongelijkheid uitbreiden.

Stelling 3 (De ongelijkheid van het meetkundig en het harmonisch gemiddelde) Laat a_1, \dots, a_n positieve getallen zijn. Dan geldt

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Gelijkheid geldt precies als $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Als je deze ongelijkheden wil gebruiken, dan kan het handig zijn om op de volgende zaken te letten:

- Let op de richting van het teken: dit geeft je een vermoeden waar je een rekenkundig of juist een meetkundig gemiddelde kunt verwachten.
- Onderzoek wanneer er gelijkheid geldt. Pas nu alleen ongelijkheden toe die gelijkheid geven onder die voorwaarde.
- Laat je leiden door de expliciete getallen (factoren en exponenten) in de uitdrukkingen: staan er veel drieën en driemachten, ga dan niet de ongelijkheden toepassen op vier termen.
- Let altijd goed op op welke getallen je een ongelijkheid toepast! Het is heel belangrijk dat je bovenstaande alleen op niet-negatieve (danwel positieve) getallen toepast.

Opgaven

Opgave 1 Bewijs dat voor alle positieve a , b en c geldt dat

$$\frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b} \leq \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Opgave 2 Bewijs dat voor reële x en y geldt dat

$$4x^2 + 9y^2 \geq 12xy.$$

Opgave 3 Laat $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeven zijn. Bepaal het minimum van de functie $f(x) = \frac{a+bx^4}{x^2}$ en bepaal voor welke waarden van x deze waarde wordt aangenomen.

Opgave 4 Bewijs dat voor niet-negatieve s en t met $st = 1$ geldt dat

$$(t+1)(s+1) \geq 4.$$

Opgave 5 *Bewijs dat de ongelijkheid van het harmonische en het meetkundige gemiddelde volgt uit de ongelijkheid van het meetkundige en het rekenkundige gemiddelde.*

Opgave 6 *Bewijs dat voor alle reële x , y en z geldt dat*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

Opgave 7 *Bewijs dat voor alle reële x , y en z geldt dat*

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq \sqrt{8}xyz.$$

Opgave 8 *Bewijs dat voor reële x, y, z geldt $x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}$. Wanneer geldt er gelijkheid?*

Opgave 9 *Gegeven dat niet-negatieve x , y en z voldoen aan $(1+x)(1+y)(1+z) = 8$. Bewijs dat $xyz \leq 1$.*

Opgave 10 *Zij n een natuurlijk getal en bekijk n positieve reële getallen x_i en definieer $x_{n+1} = x_1$. Bewijs dat*

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1}} \geq n.$$

Opgave 11 *Zij n een natuurlijk getal en bekijk n positieve reële getallen x_i . Bewijs dat*

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \geq n^2.$$

Opgave 12 *Bewijs dat voor alle positieve a , b en c geldt dat*

$$\frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b} \leq \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Opgave 13 *Laat zien dat voor alle positieve x , y , z en w geldt dat*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z} + \frac{16}{w} \geq \frac{64}{x+y+z+w}.$$