Week 5: Polynomen (set 2)

Hier volgt een klein overzicht over polynomen, meer details bevinden zich in set 1.

- Graad van een polynoom, i.h.b. het nulpolynoom.
- Staartdeling met polynomen.
- $P(a) = 0 \iff P(x) = Q(x)(X - a)$.
- Als $P \neq 0$, dan geldt $\#\{\text{nulpunten van } P\} \leq \deg P$.
- Zoek naar nulpunten en andere ontbindingen.
- Moet je een (stel) vergelijking(en) oplossen, construeer een polynoom met jouw gezochte grootheid als nulpunt.
- Moet je een polynomiale gelijkheid bewijzen in meerdere variabelen, beschouw het als polynoom in een van de variabelen en bewijs dat beide kanten dezelfde nulpunten hebben.
- Formules van Vièta: coëfficiënten van polynoom zijn symmetrische expressie in de nulpunten.

Opgaven

Opgave 1 *Bekijk het polynoom*

$$p(x) = (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{2016}x^{2016}) \cdot (1 + x + x^2 + \ldots + x^{2016}).$$

Bewijs dat $p(x)$ alleen even machten van x bevat.

Opgave 2 *a) Bestaat er een polynoom P met reële coëfficiënten zo dat*

$$P\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{k+2}{k}$$

voor alle natuurlijke k?

b) Bestaat er een polynoom Q met reële coëfficiënten zo dat

$$Q\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k+1}$$

voor alle natuurlijke k?

Opgave 3 *Bepaal de determinant van de matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 & w^4 \end{pmatrix}$$

Opgave 4 *Gegeven zijn reële getallen a en b. Zij P een punt op de grafiek $f(x) = ax^3 + bx^2$ met x-coördinaat x_0. Gegeven is dat de raaklijn in P aan deze grafiek de kromme nogmaals snijdt in een punt Q. Bewijs dat de x-coördinaat van Q gelijk is aan $-2x_0$.*

Opgave 5 *Een polynoom $P \in \mathbb{R}[X]$ van graad n voldoet aan*

$$P(k) = \frac{k}{k+1}$$

voor alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Bepaal alle mogelijke waarden van $P(n+1)$.

Opgave 6 *Bekijk de vergelijking*

$$\frac{x^2}{n^2-1^2}+\frac{y^2}{n^2-3^2}+\frac{z^2}{n^2-5^2}+\frac{w^2}{n^2-7^2}=1.$$

Gegeven is dat deze vergelijking geldt voor $n \in \{2,4,6,8\}$. *Bepaal* $x^2+y^2+z^2+w^2$.

Opgave 7 *Laat* A *en* B *twee* $n \times n$*-matrices zijn met gehele elementen zo dat alle matrices*

$$A, A+B, A+2B, \ldots, A+2nB$$

inverteerbaar zijn en hun inverses gehele getallen als elementen hebben. Laat zien dat $A+(2n+1)B$ *ook inverteerbaar is en dat de inverse ook alleen maar gehele elementen heeft.*

Opgave 8 *Vind alle oplossingen, reëel of complex, voor het systeem van vergelijkingen* $x^i+y^i+z^i=3,11,27$ *voor* $i=1,2,3$.

Opgave 9 *Gegeven zijn* $2n$ *verschillende getallen* $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$. *Bekijk een* $n\times n$*-tabel met op plek* (i,j) *het getal* a_i+b_j. *Gegeven is dat het product van de* n *getallen in een rij onafhankelijk is van de gekozen rij. Bewijs dat het product van de* n *getallen in een kolom eveneens niet afhangt van de gekozen kolom.*

Opgave 10 *Beschouw het polynoom* $p(x)=x^4-18x^3+kx^2+200x-1984$. *Het product van twee van de wortels van dit polynoom is* -32. *Bepaal* k.

Opgave 11 *Zij* $k>1$ *een natuurlijk getal. Vind alle polynomen* $p(x)$ *met reële coëfficiënten zodat* $p(x^k)=p(x)^k$.