Week 8: Functies en binaire operaties (set II)

Opgave 1 *Laat $\star$ en $\circ$ twee binaire operaties zijn op een verzameling V met respectievelijke eenheidselementen e en f, zodat*

$$(x \star y) \circ (u \star v) = (x \circ u) \star (y \circ v)$$

voor alle $x, y, u, v \in V$. Bewijs dat

a) $e = f$;

b) $x \star y = x \circ y$ *voor alle* $x, y \in V$;

c) $x \star y = y \star x$ *voor alle* $x, y \in V$.

Opgave 2 *Vind alle functies $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ die voldoen aan*

(i) $f(2) = 2$,

(ii) $f(mn) = f(m)f(n)$ *voor alle* $m, n \in \mathbb{N}$,

(iii) $f(m + 1) > f(m)$ *voor alle* $m \in \mathbb{N}$.

Opgave 3 *Een verzameling S heeft een operatie $\star$ zo dat*

(i) er een element $e \in S$ bestaat met $x \star e = x$ voor alle $x \in S$;

(ii) $(x \star y) \star z = (z \star x) \star y$ *voor alle* $x, y, z \in S$.

Bewijs dat $\star$ zowel associatief is als commutatief.

Opgave 4 *Een eindige verzameling S komt met een associatieve operatie $\star$, zo dat voldaan is aan de volgende voorwaarde:*

$$(a \star a) \star b = b \star (a \star a)$$

voor alle $a, b \in S$. Bewijs dat de verzameling van elementen van de vorm $a \star (b \star c)$ met a, b en c verschillende elementen van S, gelijk is aan de verzameling S.

Opgave 5 *Bewijs dat er geen functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaat die voldoet aan*

$$f(f(x) + y) = f(x) + 3x + yf(y)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 6 *Zij G een verzameling met daarop een associatieve binaire operatie, zo dat er een unieke links-identiteit is en ieder element een unieke links-inverse heeft. Bewijs dat G onder deze operatie een groep is.*

Opgave 7 *Bewijs of geef een tegenvoorbeeld voor de volgende bewering:*
Zij X een eindige verzameling met minstens twee elementen, dan bestaat er een binaire operatie $\star$ op X zo dat voor alle $x, y, z \in X$ geldt dat

(i) $x \star z = y \star z$ *impliceert* $x = y$;

(ii) $x \star (y \star z) \neq (x \star y) \star z$.

Opgave 8 *Bekijk een binaire operatie $\circ$ op $\mathbb{Q}$ die associatief en commutatief is, en voldoet aan $0 \circ 0 = 0$ en $(a + c) \circ (b + c) = a \circ b + c$ voor alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Bewijs dat ofwel $a \circ b = \max(a, b)$ voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$ of $a \circ b = \min(a, b)$ voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$.*