Week 10: kleine gevallen

Bij veel opgaven is het niet direct duidelijk wat je moet of kan doen. Het is dan altijd nuttig om kleine gevalletjes te bekijken; moet je iets bewijzen voor alle positieve gehele n? Bekijk eerst het geval $n = 1$. Zorg dat je dit geval helemaal waterdicht kan bewijzen en ga dan naar $n = 2$. Bewijs ook in dit geval volledig en ga door naar de volgende n. Op een gegeven moment zal je iets verzinnen waarvan het duidelijk is dat het voor algemene n gaat werken.
Ook als je wel direct een idee hebt, dan is het erg nuttig om toch eerst kleine gevalletjes te bekijken. Zo kom je er bijvoorbeeld achter of er misschien randgevallen zijn waarvoor het algemene argument niet op gaat. Ook kan je op deze manier soms een vermoeden krijgen of alle oplossingen vinden van een vergelijking (zonder te kunnen bewijzen dat dat ze allemaal zijn) en dat kan al punten opleveren.
Houd het volgende lijstje met punten in gedachte.

- Zijn er meerdere manieren om je gevallen klein te houden? Houd alles klein. Het wordt snel genoeg duidelijk of en zo ja welke variabele je vrij kan laten.
- Gewoon doen, niet denken! Vijf minuten domweg schrijven om een goed idee te krijgen, is een goede tijdsbesteding.
- Houd er structuur en overzicht in. Sla geen gevallen over!
- Wat valt er op? Geldt dit ook in het volgende geval? Zo ja, probeer het te bewijzen. Schrijf je vermoedens op en geef duidelijk aan wat opvalt.
- Bekijk gegeneraliseerde, maar kleine, gevallen.
- Bedenk dat als je een opgave niet voor $n = 2$ kan bewijzen, het je ook niet gaat lukken voor algemene n.
- Wordt het volgende kleine geval te groot?
  - Bekijk alleen “interessante” gevallen. Zijn dat er nog te veel?
  - Bekijk van deze kleine interessante gevallen een zo algemeen mogelijke situatie.
- Heb je nog geen idee? Doe gewoon het volgende geval, zelfs als het vrij groot wordt.

We laten dit zien aan de hand van de volgende opgave.

Voorbeeldopgave 1 *Zij p een priemgetal en $n > p$ een natuurlijk getal zo dat $np+1$ een kwadraat is. Bewijs dat $n+1$ geschreven kan worden als de som van p kwadraten van positieve gehele getallen.*

De kleinste mogelijke p is natuurlijk 2, en dan geldt $n = 3, 4, \ldots$. We maken een tabel

n	3	4	5	6	7	8	9
$np+1$	7	$\underline{9}$	11	13	15	17	19

Het enige kwadraat hebben we aangegeven. De vraag is dus voor $(p, n) = (2, 4)$ of we $n + 1 = 5$ kunnen schrijven als de som van twee kwadraten. Dat is evident met

$$(p, n) = (2, 4) \Rightarrow n + 1 = 1^2 + 2^2.$$

Natuurlijk staan in de tabel alle oneven getallen vanaf 7 en de kwadraten daarin zijn natuurlijk de kwadraten van oneven getallen minstens 3. Nu hebben we 3 al gedaan, dus gaan we verder met $np + 1 \in \{5^2, 7^2, \ldots\}$.

$\sqrt{np+1}$	5	7	9	11
$np+1$	25	49	81	121
n	12	24	40	60
$n+1$	13	25	41	61

Nu vinden we unieke manieren om die kwadraten te kiezen:

$$(p, n) = (2, 12) \Rightarrow n + 1 = 2^2 + 3^2$$
$$(p, n) = (2, 24) \Rightarrow n + 1 = 3^2 + 4^2.$$

Nu hebben we voor $p = 2$ wel een vermoeden, maar het kost bijna geen tijd om het ook voor de volgende twee gevallen te controleren:

$$(p, n) = (2, 40) \Rightarrow n + 1 = 4^2 + 5^2$$
$$(p, n) = (2, 61) \Rightarrow n + 1 = 5^2 + 6^2.$$

In dit geval is het duidelijk dat de kwadraten iets te maken hebben met de k, zo dat $k^2 = np + 1$. In dit geval kunnen we vast ook bewijzen dat $n + 1 = (k - 1)^2 + k^2$. Dus we kunnen door naar $p = 3$.
Dus nu bekijken we $p = 3$. Voor welke n is $np+1$ een kwadraat? We gaan maar weer kleine $n > 3$ uitproberen.

n	4	5	6	7	8	9	10
$np + 1$	13	$\underline{16}$	19	22	$\underline{25}$	28	31
k		4			5		

Nu groeit $np+1$ linear in n, maar de gaten tussen de kwadraten wordt steeds groter, dus eigenlijk is het net als net beter om vanuit k te gaan kijken.

k	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$np + 1$	16	25	36	49	64	81	100	121	144
n	5	8		16	21		33	40	
$n + 1$	6	9		17	22		34	41	

We zien dat alle kwadraten van getallen niet deelbaar zijn door 3 juist van de vorm $3n + 1$ zijn. Het is duidelijk dat kwadraten van drievouden juist niet zo te schrijven zijn. Laten we nu weer kwadraten zoeken. We geven ook de k weer, want die lijkt belangrijk te zijn.

$$(p, k, n) = (3, 4, 5) \Rightarrow n + 1 = 1^2 + 1^2 + 2^2$$
$$(p, k, n) = (3, 5, 8) \Rightarrow n + 1 = 1^2 + 2^2 + 2^2$$
$$(p, k, n) = (3, 7, 16) \Rightarrow n + 1 = 2^2 + 2^2 + 3^2$$
$$(p, k, n) = (3, 8, 21) \Rightarrow n + 1 = 2^2 + 3^2 + 3^2$$
$$(p, k, n) = (3, 10, 33) \Rightarrow n + 1 = 3^2 + 3^2 + 4^2$$
$$(p, k, n) = (3, 11, 40) \Rightarrow n + 1 = 3^2 + 4^2 + 4^2$$

In de oplossingen zien we twee verschillende patronen, maar als k drie toeneemt, dan nemen alle drie de kwadraten met een toe. Dat onderscheid lijkt dus te zijn of k congruent aan 1 of 2 $\mod 3$ is. Als we hebben dat $k = 3m + 1$, dan vinden $n + 1 = m^2 + m^2 + (m + 1)^2$ en als juist geldt $k = 3m + 2$, dan zien we $n + 1 = m^2 + (m + 1)^2 + (m + 1)^2$. Ter controle proberen we nog even $k = 13$ en $k = 14$ (beide met $m = 4$), dat geeft $n + 1 = 57$ en $n + 1 = 66$ en die zijn inderdaad gelijk aan respectievelijk $4^2 + 4^2 + 5^2$ en $4^2 + 5^2 + 5^2$.
Nu volgt natuurlijk de gevallen met $p = 5$. Net als hiervoor gaan we kijken naar k zo dat er een n is met $pn + 1 = k^2$

k	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$np + 1$	36	49	64	81	100	121	144	169	196
n	7			16		24			39
$n + 1$	8			17		25			40

Nu vinden we juist een n als k congruent is aan 1 of 4 $\mod 5$. Dit kunnen we beter zien als ± 1 $\mod 5$, want dan zien we dat dat ook is wat we hadden bij $p = 2$ en $p = 3$. Dit kunnen we nu algemeen bewijzen. Dan gaan we vervolgens verder met onze gevallen hierboven. We splitsen de gevallen we weer op aan de hand van het teken in $k = 5m \pm 1$.

$$
\begin{aligned}
(p,k,n) = (5,6,7) &\Rightarrow n+1 = 1^2+1^2+1^2+1^2+2^2 \\
(p,k,n) = (5,11,24) &\Rightarrow n+1 = 2^2+2^2+2^2+2^2+3^2
\end{aligned}
$$

en

$$
\begin{aligned}
(p,k,n) = (5,9,25) &\Rightarrow n+1 = 1^2+2^2+2^2+2^2+2^2 \\
(p,k,n) = (5,14,40) &\Rightarrow n+1 = 2^2+3^2+3^2+3^2+3^2
\end{aligned}
$$

Er geldt dus nog steeds dat als $k = 5m+1$, dan vinden we $n+1 = 4m^2 + (m-1)^2$. Als juist $k = 5m-1$, dan zien we $n+1 = (m-1)^2 + 4m^2$. We kunnen dit nog even snel controleren voor $m = 3$ en $n = \frac{1}{5}16^2 - 1 = \frac{1}{5}\cdot 15\cdot 17 = 3\cdot 17 = 51$ en $m = 4$ en $n = \frac{1}{5}19^2 - 1 = \frac{1}{5}\cdot 18\cdot 20 = 18\cdot 4 = 72$. Dan vinden we dat $n+1$ is dan 52 en 72 en inderdaad

$$
\begin{aligned}
52 &= 3^2+3^2+3^2+3^2+4^2 \\
72 &= 3^2+4^2+4^2+4^2+4^2.
\end{aligned}
$$

We bekijken nu ter laatste controle $k = 2\cdot 7 \pm 1$ voor $p = 7$, zodat we krijgen $n = \frac{1}{7}(13^2-1) = \frac{1}{7}\cdot 12\cdot 14 = 12\cdot 2 = 24$ en $n = \frac{1}{7}(15^2-1) = \frac{1}{7}\cdot 14\cdot 16 = 2\cdot 16 = 32$ ook hier geldt

$$
\begin{aligned}
25 &= 1^2+2^2+2^2+2^2+2^2+2^2+2^2 \\
33 &= 2^2+2^2+2^2+2^2+2^2+2^2+3^2.
\end{aligned}
$$

Er lijkt dus nu in het algemeen te gelden dat $k \equiv \pm 1 \mod p$ en dat voor $k = pm+1$ we hebben $n+1 = (p-1)m^2 + (m+1)^2$ en voor $k = pm-1$ juist $n+1 = m^2 + (p-1)(m+1)^2$. Daarmee is de opgave gereduceerd tot een simpele schrijfoefening.

Opgaven

Opgave 1 *Gegeven is een priemgetal p zo dat p^2+2 ook een priemgetal is. Bewijs dat p^3+2 ook een priemgetal is.*

Opgave 2 *Voor elk geheel getal $n \geq 0$ definiëren we $x_n = 2^n - n$. Vind alle gehele $m \geq 0$ zodat*

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_m$$

een tweemacht is.

Opgave 3 *De functie $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ is gedefinieerd door $f(1) = 1$, $f(3) = 3$ en*

$$
\begin{aligned}
f(2n) &= f(n), \\
f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n), \\
f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n).
\end{aligned}
$$

Bepaal het aantal $n \in \{1,2,\ldots,2015\}$ met $f(n) = n$.

Opgave 4 *Laat m en n positieve gehele getallen zijn met $m > 1$. Anastasia deelt de getallen $1,2,\ldots,2m$ op in m paren. Daarna kiest Boris één getal van elk paar en berekent de som van deze gekozen getallen. Bewijs dat Anastasia de paren zo kan maken dat Boris niet op een som gelijk aan n kan uitkomen.*

Opgave 5 *Bewijs voor elk paar positieve gehele getallen k en n dat er k (niet noodzakelijk verschillende) positieve gehele getallen $m_1, m_2, \ldots, m_k$ bestaan zodanig dat*

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Opgave 6 *Een domino is een* 2×1*- of een* 1×2*-tegel. Bepaal op hoeveel manieren precies* n^2 *domino's zonder overlap op een* $2n \times 2n$*-schaakbord kunnen worden geplaatst zodat elk* 2×2*-vierkant minstens twee onbedekte eenheidsvierkantjes bevat die in dezelfde rij of kolom liggen.*

Opgave 7 *Zij* $n \geq 3$ *een geheel getal. Beschouw een cirkel met daarop* $n + 1$ *punten die op onderling gelijke afstand liggen. Beschouw alle manieren om deze punten met de getallen* $0, 1, \ldots, n$ *te labelen zodanig dat elk getal precies één keer wordt gebruikt; twee zulke manieren worden als gelijk beschouwd als je de ene uit de andere kan verkrijgen door draaiing van de cirkel. We noemen een manier om de punten te labelen mooi als voor elk viertal labels* $a < b < c < d$ *met* $a+d = b+c$*, de koorde tussen* a *en* d *geen snijpunt heeft met de koorde tussen* b *en* c*.*
Zij M *het aantal mooie manieren om de punten te labelen, en zij* N *het aantal geordende paren* (x, y) *van (strikt) positieve gehele getallen zodanig dat* $x + y \leq n$ *en* $\mathrm{ggd}(x, y) = 1$*.*
Bewijs dat $M = N + 1$*.*