Week 14: reeksen

- Een reeks is een speciaal soort rij, dus: denk altijd eerst na over convergentie! In het bijzonder: monotone, begrensde rijen convergeren.
- Voor reeksen zijn meer convergentietesten: absolute convergentie impliceert convergentie, afschatten met absoluut convergente rij, ratiotest, integraaltest, worteltest, enzovoorts.
- Let op bij het verwisselen van oneindige sommen (en integralen)! Als alles absoluut convergeert gaat het eigenlijk altijd goed.
- Als je daadwerkelijk een limiet moet bepalen, reken eerst een aantal termen uit en vorm een vermoeden. Bekijk ook het verschil van de partiële sommen met je vermoeden. Dit geldt uiteraard ook voor algemene rijen.
- Het kan vaak helpen om breuken te splitsen.
- Soms krijg je een mooie telescoopreeks. Let wel op ook dan de partiële sommen convergeren. Vaak is in deze gevallen het verschil van de partiële sommen met de limiet erg mooi!
- Herken machtreeksen geëvalueerd in een specifiek punt! De volgende machtreeksen moet je echt weten, de rest kan je afleiden:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{voor} \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \text{voor} \qquad |x| < 1;$$

  in het bijzonder

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \text{voor} \qquad |x| < 1.$$

  Bijvoorbeeld vinden we door te integreren dat

$$\log(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \qquad \text{voor} \qquad |x| < 1.$$

- Je mag natuurlijk niet alles invullen op een machtreeks. Stel bijvoorbeeld dat een formele machtreeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

  absoluut convergeert voor $|x| < r$, dan geeft dit een continue functie $f(x)$ op $(-r, r)$. We kunnen niet zomaar $\pm r$ invullen. Gelukkig is er de volgende stelling:

  Stelling 1 (Stelling van Abel) *In de situatie als hierboven: als de formele machtreeks convergeert voor $x = r$ met limiet l, dan geldt*

$$l = \lim_{x \uparrow r} f(x).$$

  Oftewel, als de machtreeks convergeert op de rand, dan is de limiet wat je verwacht.

- Bedenk dat een voorkomen van de extra index in de teller of nummer kan wijzen op het differentiëren of integreren van een bekende machtreeksontwikkeling.

- Zijn de termen van je reeks precies de s-de termen met $s \equiv a \mod m$ van een bekende machtreeks, gebruik complexe m-de-machtseenheidswortels. Ga wel na of de machtreeks convergeert op de eenheidscirkel.

Bekijken deze strategie op de volgende opgaven, die we op meerdere manieren zullen oplossen.

Voorbeeldopgave 1 *Bepaal*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Merk op dat de reeks enkel positieve termen heeft en begrensd is door bijvoorbeeld

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

voor $\alpha = 2$. Aangezien we weten dat zulke reeksen convergeren voor $\alpha > 1$ (kies je favoriete convergentietest) convergeert de reeks in de opgave ook.

Nu gaan we eerst maar eens wat termen uitrekenen. Daartoe definiëren we

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)}$$

en bekijken we de volgende tabel:

k	1	2	3	4
$\frac{1}{k(k+1)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$
s_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

Nu krijgen we het vermoeden dat $s_k = \frac{k}{k+1}$, wat we natuurlijk testen voor $k = 5$ en vervolgens met inductie kunnen bewijzen. Het volgt nu eenvoudig dat $s_k \to 1$ voor $k \to \infty$.

Stel nu dat we de regelmaat in s_k niet zagen, dan is een nuttige volgende stap om in ieder geval te bedenken wat de limiet zou moeten worden. Die lijkt in de tabel wel 1 te zijn en dan kunnen we nu kijken naar het verschil van s_k met 1.

k	1	2	3	4
$1 - s_k$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

Nu zien we dat $1 - s_k = \frac{1}{k+1}$ en zien we dat de s_k inderdaad naar 1 convergeren.

Hoe we dit ook hadden kunnen zien is door breuken te splitsen: er bestaan A en B zo dat voor alle n geldt

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}.$$

Hieruit volgt dat $A = 1$ en $B = -1$ en dus

$$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Er is echter nog een manier, die hier zeker niet de meest directe is. We kunnen de som namelijk zien als de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{12} + \ldots$$

geëvalueerd in $x = 1$. Nu lijkt $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ heel erg op een tweemaal geïntegreerde vorm van x^{n-1} dus we verschuiven de machten naar

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \dots$$

Dit is dus de machtreeks verkregen door

$$\frac{1}{1-x}$$

tweemaal te integeren. Dat is dus een integraal van

$$-\log(1-x) + C$$

en dat levert

$$(1-x)\log(1-x) - (1-x) + Cx + D.$$

Nu moeten we C en D bepalen, maar we weten $f(0) = D - 1$ en $f'(0) = C$. Dus $C = 0$ en $D = 1$ en we vinden dat

$$f(x) = (1-x)\log(1-x) + x \quad \text{voor} \quad |x| < 1$$

aangezien dat ook het convergentiegebied voor $\frac{1}{x-1}$ is. We weten gelukkig al dat de reeks convergeert voor $x = 1$ en dus volgt met de stelling van Abel dat de limiet van de reeks gelijk is aan

$$f(1) = 1.$$

Opgaven

Opgave 1 *Bepaal*

$$\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots$$

Opgave 2 *Bereken*

$$\frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4} - \frac{9}{4 \cdot 5} + \dots$$

Opgave 3 *Wat is de limiet van*

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \dots?$$

Opgave 4 *Vind een rationale functie $f(x)$ zo dat voor alle reële x met $|x| < 1$ geldt dat*

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \dots$$

convergeert naar $f(x)$.

In de volgende opgave zijn F_i de Fibonacci-getallen gegeven door $F_0 = 1 = F_1$.

Opgave 5 *Bepaal*

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}};$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}.$$

Opgave 6 *Druk*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k}{(3^{k+1} - 2^{k+1})(3^k - 2^k)}$$

uit als rationaal getal.

Opgave 7 *Bereken het oneindige product*

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}.$$

Opgave 8 *Bepaal*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}.$$

Opgave 9 *Bepaal*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}.$$

Opgave 10 *Bereken*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}.$$

Opgave 11 *Bepaal*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \right).$$

Opgave 12 *Definieer een rij* $a_0, a_1, \ldots$ *door* $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$ *en*

$$a_{n+1} = \frac{n a_n^2}{1 + (n+1) a_n} \qquad \textit{voor} \qquad n \geq 1.$$

Laat zien dat de reeks $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ *convergeert en bepaal de limiet.*

Opgave 13 *Bepaal*

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots$$

Opgave 14 *Vind alle reële getallen* $\alpha > 0$ *waarvoor geldt dat*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2012}{(n+\alpha)(16n+2012)} = 1.$$

Opgave 15 *Bereken*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Opgave 16 *Bereken*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots$$

Opgave 17 *Bereken het rationale getal*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}.$$

Opgave 18 *Bepaal de waarde van*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2n}{3^m(n3^m+m3^n)}.$$

Opgave 19 *Bereken de limiet*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(9n^2-1)}.$$

Opgave 20 *Zij k een positief geheel getal. Bereken*

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=1}^{\infty}\frac{1}{n_1n_2\ldots n_k(n_1+n_2+\ldots+n_k+1)}.$$

Opgave 21 *Bereken*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{arccot}(n^2+n+1)$$

waar $\operatorname{arccot} t$ *voor* $t \geq 0$ *gedefinieerd is als de unieke* $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ *met* $\cot\theta = t$.

Opgave 22 *Bepaal de waarde van*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right).$$