Opgaven week 2: Combinatoriek I

Opgave 1 *Beschouw een bungeejumpteam met 30 springers.*

(a) Op hoeveel manieren kan het team een bestuur samenstellen bestaande uit een praeses, een quaestor en een abactis?

(b) Op hoeveel manieren kan het team een hoogtevreescommissie bestaande uit drie (gelijkwaardige) leden samenstellen?

(c) Op hoeveel manieren kunnen de 30 springers verdeeld worden over een propellor- en een zweefvliegtuig tijdens het jaarlijkse Bijlmer deltavliegevenement, op zo'n manier dat er geen vliegtuig zonder springers vertrekt?

Opgave 2 *Geef voor de volgende identiteiten een combinatorisch bewijs:*

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

(b) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$;

(c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Opgave 3 *(a) Op hoeveel manieren kun je 2015 schrijven als* $x_1 + \ldots + x_{42}$*, waarbij* x_i *voor elke* $i = 1, \ldots, 42$ *een niet-negatief geheel getal is?*

(b) Dezelfde vraag, maar dan met x_i *positieve gehele getallen.*

(c) Dezelfde vraag, maar dan met x_i *niet-negatieve oneven gehele getallen.*

(d) Hoeveel 42-tallen $(x_1, \ldots, x_{42})$ *van niet-negatieve gehele getallen zijn er die voldoen aan* $x_1 + \ldots + x_{42} \leqslant 2015$*?*

Opgave 4 *Zijn* m *en* n *twee natuurlijke getallen zodanig dat* $m \geqslant n$*.*

(a) Hoeveel functies $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ *bestaan er?*

(b) Hoeveel van deze functies zijn injectief?

(c) Hoeveel van deze functies zijn (strikt) stijgend?

(d) Hoeveel functies $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ *zijn niet-dalend?*

(e) Hoeveel functies $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ *zijn surjectief?*

Opgave 5 *Geef voor de volgende identiteiten een combinatorisch bewijs:*

(a) $m\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1}$;

(b) $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$;

(c) $\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$;

(d) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i = n \cdot 2^{n-1}$.

Opgave 6 *Beschouw* n *punten op een cirkel en alle* $\binom{n}{2}$ *lijnstukken ertussen. Neem aan dat geen drie lijnstukken door een punt gaan. Bereken het aantal snijpunten van de lijnstukken binnen de cirkel.*

Opgave 7 *Vind het aantal paren* (a, b) *van natuurlijke getallen zodanig dat* a *en* b *kwadraatvrij zijn,* a *en* b *geen priemfactor groter dan 42 hebben en* a *en* b *copriem zijn.*

Opgave 8 *Geef voor de volgende identiteiten een combinatorisch bewijs:*

(a) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 2^i = 3^n$;

(b) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$;

(c) $\sum_{i=m}^{n} \binom{i}{m}\binom{n}{i} = \binom{n}{m} \cdot 2^{m-n}$;

(d)
$$\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n+1}{4}.$$

Opgave 9 *Bereken* $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^2$.

Opgave 10 *Een Filipijns spookdier loopt over een rooster van* $(0,0)$ *naar* $(0,0)$*. Hij doet* $2n$ *stappen van lengte 1 in een van de vier standaardrichtingen. Op hoeveel manieren kan dit?*

Opgave 11 (Bonus) *Beschouw paden in het rooster van* $(0,0)$ *naar* (n,n) *bestaande uit stappen van lengte 1 naar rechts en naar boven. Zij* P *de verzameling van zulke paden. Een diagonaalpunt is een punt van de vorm* (i,i)*. Voor een pad* $p \in P$*, is* $a(p)$ *het aantal diagonaalpunten op* p *(inclusief* $(0,0)$ *en* (n,n)*). Bereken*
$$\sum_{p \in P} a(p).$$